
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



Mestrado em Matemática Pura e Aplicada

RECUPERAÇÃO ÓTIMA PARA FUNCIONAIS LINEARES

Matheus Micadei Marzo

São José dos Campos

2019

Matheus Micadei Marzo

RECUPERAÇÃO ÓTIMA PARA FUNCIONAIS LINEARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Paulo – Instituto de Ciência e Tecnologia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador:

Prof. Dr. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

São José dos Campos

2019

B328e Marzo, Matheus Micadei
Recuperação ótima para Funcionais Lineares / Matheus Micadei
Marzo. – São José dos Campos, 2019-
43 p. ; 30 cm.

Orientador: Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de São Paulo,
Instituto de Ciência e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada, 2019.

Título em inglês: Optimal Recovery of Linear Functionals.

Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciência e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e
Aplicada

Chefe do Departamento de Ciência e Tecnologia:

Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada:

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

Apoio Financeiro: CAPES – Demanda Social



ATA DE DEFESA DE MESTRADO

Ata de defesa pública de Dissertação do Programa de Pós-graduação em MATEMÁTICA PURA E APLICADA do ICT- Unifesp São José dos Campos. Aos 29 dias do mês de abril de 2019, às 14h00, na Sala de Videoconferência da unidade Parque Tecnológico realizou-se a defesa da Dissertação do Senhor MATHEUS MICADEI MARZO apresentada para a obtenção do título de MESTRE intitulado:

“Recuperação Ótima para Funcionais Lineares”

Após declarada a sessão, o Sr. Presidente passa a palavra ao candidato para a exposição e a seguir aos examinadores para as devidas arguições que se desenvolvem nos termos regimentais. Em seguida, a Comissão Julgadora proclama o resultado:

Nome dos participantes de Banca	Função	Instituição	Resultado
Profa. Dra. Vanessa Gonçalves P. Ferraz	Presidente	ICT-UNIFESP	
Prof. Dr. Guilherme Lima Ferreira da Silva	Titular	Universidade de Michigan	Aprovado
Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann	Titular	ICT-UNIFESP	Aprovado
Prof. Dr. Weldon A. Lodwick	Titular	Universidade do Colorado	Aprovado

Resultado Final: Aprovado (APROVADO/REPROVADO)

Parecer da Comissão Julgadora *

<p>O mestrando se compromete a entregar versão final incluindo modificações indicadas pela banca.</p>

A ata segue assinada pelo presidente e pelos membros da Comissão Examinadora.

Profa. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz	Presidente	Ass. <u>Vanessa Paschoa Ferraz</u>
Prof. Dr. Guilherme Lima Ferreira da Silva	Titular	Ass. <u>Guilherme Lima Ferreira da Silva</u>
Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann	Titular	Ass. <u>Pedro Levit Kaufmann</u>
Prof. Dr. Weldon A. Lodwick	Titular	Ass. <u>Weldon A. Lodwick</u>

*Obs.: Se o candidato for reprovado por algum dos membros, o preenchimento do parecer é obrigatório.

A defesa foi homologada pelo Conselho de Pós-graduação e Pesquisa em __/__/2019 e, portanto, a aluna faz jus ao título de MESTRE em MATEMÁTICA APLICADA obtido no Programa de Pós-graduação em MATEMÁTICA PURA E APLICADA.

Prof. Dr. MÁRCIO PORTO BASGALUPP
Coordenador da Câmara de Pós-Graduação e
Pesquisa do ICT

RESUMO

Os problemas de recuperação ótima buscam a construção e caracterização do melhor método de aproximação de determinado funcional em diferentes classes de funções, considerando alguns dados que são disponibilizados. Vários problemas clássicos como interpolação, aproximação uniforme e integração numérica podem ser abordados neste contexto. O objeto de estudo deste projeto é a teoria de recuperação ótima para funcionais lineares, que proporciona ferramentas matemáticas apropriadas para a análise e comparação de erro de diferentes métodos. A ideia principal foi construir um texto com uma linguagem simples o suficiente para ser lido e entendido mesmo para aqueles que não são da área. Nesse sentido foi construído diversos exemplos e, sempre que possível, optamos pelas demonstrações mais diretas e simples. Como exemplos de espaços com métodos de recuperação ótima são apresentados os Sistemas de Chebyshev com um funcional linear qualquer e um método de recuperação semelhante à quadratura de Gauss, e o Espaço de Hardy com o funcional de avaliação em um ponto e um método de recuperação ótimo baseado no valor da função em outros pontos

Palavras-chave: Recuperação Ótima. Sistemas de Chebyshev. Espaços de Hardy. Funcionais Lineares

ABSTRACT

The Optimal Recovery problems seeks to construct and characterize the best method of approximation of a certain functional in different classes of functions, considering some data that are available. Several classical problems such as interpolation, uniform approximation and numerical integration can be approached in this context. The object of our study is the theory of optimal recovery for linear functionals, which provides appropriate mathematical tools for the analysis and comparison of error of different methods. The main idea was to construct a text with a simple enough language to be read and understood even for those who are not from the area. In this sense, several examples have been constructed and, whenever possible, we have opted for the most direct and simple demonstrations. As examples of spaces with optimal recovery methods are presented the Chebyshev Systems with any linear functional and a Gauss quadrature-like recovery method, and the Hardy Space with the one-point functional evaluation and an optimal recovery method based on the value of the function in other points

Keywords: Optimal Recovery. Chebyshev System. Hardy Spaces. Linear functionals.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Conceitos básicos em Recuperação Ótima	3
2.1	Um simples problema de interpolação	7
2.2	Método de Gauss	8
2.3	Fórmula de Quadratura de Hermite	9
2.4	Lema de Smolyak	14
2.5	Recuperação ótima e multiplicadores de Lagrange	16
3	Sistemas de Chebyshev	19
3.1	Sistemas de Chebyshev	19
4	Espaços de Hardy	37
	Referências	41

1 INTRODUÇÃO

O tema *recuperação ótima* trata da busca por métodos de aproximação que minimizem erros em determinados espaços, criando uma teoria matemática bem estruturada para que os problemas deste tipo possam ser abordados de maneira menos particularizada. Em geral, o problema considerado é encontrar um método que forneça estimativas para um valor desconhecido ou de difícil cálculo usando dados que são facilmente disponibilizados. Esta situação é muito comum no cálculo numérico utilizado na resolução de diversos problemas de matemática aplicada.

Por exemplo, suponhamos que desejamos fazer uma estimativa de $\int_0^1 f(x)dx$ sabendo apenas os valores de $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$ e que f é uma contração, isto é, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Podemos criar diversos métodos de aproximar $\int_0^1 f(x)dx$ usando apenas a informação dada. Para comparar um método com outro e dizer que um método é melhor do que outro precisamos ter uma maneira de medir o erro que cada método pode gerar. Uma maneira que nos parece natural para isso é considerar o erro de cada método no pior caso.

Neste exemplo podemos usar alguns métodos conhecidos para obter uma estimativa de $\int_0^1 f(x)dx$ como o Método do Paralelogramo ou Método de Simpson. E como decidir qual é melhor? Essa resposta depende fortemente do contexto que estamos considerando, que neste caso é o espaço de funções que são contrações em $[0, 1]$.

Os problemas de Recuperação Ótima podem ser estudados em um contexto bem geral, mas será abordado nesse texto os problemas relacionados com funcionais lineares, que já abrange uma enorme quantidade de problemas. Este é o caso do exemplo anterior em que o funcional linear é a integral no intervalo $[0, 1]$.

Um outro exemplo de funcional linear de grande interesse é a simples soma de determinados valores da função.

Apesar da fórmula de quadratura de Gauss ser um método clássico pouco foi encontrado na literatura sobre sua aplicação na aproximação de somas. Esse caso é relacionado diretamente com os polinômios de Gram, de modo que os nós e coeficientes da fórmula de quadratura podem ser obtidos se conhecidos os zeros dos polinômios de Gram, tal abordagem foi realizada por Dimitar K. Dimitrov, Eduardo Godoy, Ivan Area e Vanessa Paschoa Ferraz no artigo ([DIMITROV et al., 2014](#)), no qual são fornecidos limitantes para os zeros dos polinômios de Gram, que são exatamente os nós da fórmula de quadratura de Gauss. Em um segundo artigo ([DIMITROV et al., 2018](#)) submetido pelo mesmo grupo, é abordada a construção da fórmula de quadratura para somas aplicando o método de Weierstrass-Dochev-Durand-Kerner com aproximações iniciais fornecidas, garantindo a convergência e obtendo excelentes estimativas dos zeros dos polinômios de Gram. Neste

segundo artigo é discutido também o erro cometido em determinados espaços de funções.

Sabemos que em determinados espaços as fórmulas de quadratura de Gauss tem convergência superior comparada às fórmulas de quadratura mais simples como do trapézio e de Simpson. No entanto, pouco pode ser encontrado sobre comparações analíticas deste tipo em contextos mais gerais. Por exemplo, no artigo "*Is Gauss Quadrature Better than Clenshaw-Curtis?*" de L. N. Trefethen, ([TREFETHEN, 2008](#)), é feita apenas uma comparação baseada em exemplos numéricos entre a quadratura de Gauss para integrais (com nós sendo os zeros do polinômio de Legendre) com a simples e interessante fórmula de quadratura de Clenshaw-Curtis.

A ideia na teoria de Recuperação Ótima é medir o erro que cada método de aproximação pode cometer com relação a determinada classe de funções e quando possível encontrar o método que produz erro mínimo em determinado contexto. Fica implícito que é essencialmente importante nesta teoria estabelecer as classes de funções adequadas para que surjam resultados interessantes e também escolher maneiras adequadas de medir o erro. Deste modo surge uma teoria que lida com diversos métodos de aproximação e nos fornece ferramentas para analisar os erros de diversas formas e de maneira mais robusta do que baseada em testes numéricos.

Muitos matemáticos trabalharam e contribuíram nesta área. Os primeiros artigos foram escritos por Sard, ([SARD, 1949](#)) em 1949 e Nikolskii, em 1950. Nesse artigo Nikolskii reconhece que um matemático pioneiro nestes estudos foi Kolmogorov. Também são destacados os trabalhos de Golomb e Weinberger ([WEINBERGER; GOLOMB, 1958](#)), Schoenberg ([SCHOENBERG, 1964](#)), Bakhvalov ([BAKHVALOV, 1971](#); [BAKHVALOV, 1992](#)), Michelli, Rivlin e Winograd, ([MICCHELLI; RIVLIN, 1977](#); [MICCHELLI; RIVLIN; WINOGRAD, 1976](#)), Bojanov ([BOYANOV, 1975](#); [BOYANOV, 1976](#); [BOYANOV, 1977](#); [BOYANOV, 1979b](#); [BOYANOV, 1979a](#); [BOYANOV, 1981](#); [BOYANOV, 1986](#); [BOYANOV, 1987](#); [BOYANOV, 1990](#); [BOYANOV, 1992](#); [BOYANOV; HUANG, 1990](#); [BOYANOV; NIKOLOV, 1990](#)), Traub e Wozniakowski ([TRAUB, 1980](#)), Korneichuk ([KORNEICHUK, 1984](#); [KORNEICHUK; PAVLOVICH, 1991](#)) e Osipenko ([OSIPENKO; STESSIN, 1992](#)). Dedicaremos esse texto a padronização da linguagem matemática que permeia essa teoria, passando primeiramente por resultados clássicos e abordando os sistemas de Chebyshev aplicados a teoria de recuperação para funcionais lineares.

2 CONCEITOS BÁSICOS EM RECUPERAÇÃO ÓTIMA

Os problemas que abordaremos podem ser estabelecidos da seguinte forma. Consideramos um funcional linear L definido em um espaço vetorial de funções X que pode ser aplicado a uma determinada classe de funções A deste espaço. Denotamos por $L(f)$ o valor do funcional L aplicado a uma função f desta classe. Suponha que seja difícil obter o valor $L(f)$ mas que são conhecidas algumas informações sobre f que podem ser usadas para estimar o valor $L(f)$. Vamos considerar ainda que certa informação é conhecida sobre cada função e que seja representada através dos valores de funcionais lineares L_1, \dots, L_n de A .

No exemplo mencionado no capítulo primeiro o funcional linear considerado foi $L(f) = \int_0^1 f(x)dx$, as informações conhecidas de f eram os valores de f em alguns pontos, que podem ser representados como funcionais lineares $L_1f = f(0)$, $L_2f = f(1/2)$ e $L_3f = f(1)$ e a classe de funções considerada é a das contrações em $[0, 1]$.

Dada uma função f de A suponha que sejam conhecidos os valores L_1f, \dots, L_nf . Denotaremos $\mathbf{F}f := (L_1f, \dots, L_nf)$ e chamaremos de informação de f ou dados de f . Assim, cada método de aproximação de $L(f)$ usando $\mathbf{F}f$ é uma função $\Phi : Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O esquema da Figura 1 ilustra essa situação.

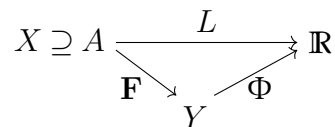


Figura 1 – Esquema de aproximação de $L(f)$

Nessas condições podemos definir o erro da seguinte forma

$$e(L, A, \mathbf{F}, \Phi) := \sup_{f \in A} |L(f) - \Phi(\mathbf{F}f)|.$$

O valor

$$E(L, A, \mathbf{F}) := \inf_{\Phi} e(L, A, \mathbf{F}, \Phi) \tag{2.1}$$

é denominado de erro ótimo (BANACH, 1932). Qualquer método tal que o erro seja igual ao erro ótimo é chamado de método ótimo. Usaremos também nas próximas páginas a seguinte definição:

$$E_0 := \sup\{|L(f)| : f \in A, \mathbf{F}f = 0\}$$

Além disso mostraremos que $E_0 \leq e(L, A, \mathbf{F}, \Phi) \quad \forall \Phi$ após a demonstração do Lema de Smolyak 2.4.

A princípio, em um problema qualquer, não sabemos se existe um método que satisfaça a condição de ser ótimo. Se houver um método de recuperação ótima, que não necessariamente é único, ainda podemos não saber qual é este método. Dentre as diversas possibilidades de funções $\Phi : Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que possam satisfazer a condição de ser método de recuperação ótima as funções lineares com sua simplicidade se destacam pelo notável fato do Lema a seguir.

Lema 2.1. (*Lema de Smolyak*) *Dados um funcional L no espaço de funções X , $A \subset X$, convexo e balanceado, isto é, se $f \in A$ então $-f \in A$, e $\mathbf{F} = (L_1, \dots, L_n)$ funcionais lineares cujos valores são conhecidos para cada f em A , existe um método ótimo linear, descrito pelos escalares c_1, \dots, a_n , tais que*

$$E(L, A, \mathbf{F}) = \sup\{|L(f) - \sum_{i=1}^n a_i L_i(f)|, f \in A\}$$

Apresentaremos a demonstração desse lema no decorrer dessa dissertação. A demonstração baseia-se na análise do valor E_0 . A hipótese de que se $f \in A$ então $-f \in A$ implica que $E_0 \leq e(L, A, \mathbf{F})$. Já a hipótese de A ser convexo é que garante a existência de constantes $\{a_k\}_{k=1}^n$ tais que $|Lp - \sum_{i=1}^n a_i L_i p| \leq E_0$.

Se consideramos um conjunto A que satisfaz as hipóteses do Lema de Smolyak então podemos considerar apenas os métodos lineares. Ou seja, se a informação considerada é $\mathbf{F}f = (L_1 f, \dots, L_n f)$ precisamos considerar apenas os métodos de aproximação da forma $\Phi(\mathbf{F}f) = \sum_{i=1}^n a_i L_i(f)$.

Podemos constatar se os dados fornecidos por \mathbf{F} são de fato interessantes comparando $E_0 = \sup\{|L(f)| : f \in A, \mathbf{F}f = \vec{0}\}$ e $e(L, A, \mathbf{F}, 0) = \sup\{|L(f)| : f \in A\}$. Veja que, $e(L, A, \mathbf{F}, 0) \geq \sup\{|L(f) - \Phi(0)| : f \in A, \mathbf{F}f = 0\} \geq \max\{|L(f) - \Phi(0)|, |L(-f) - \Phi(0)|\} \geq |L(f)|$ para todo $f \in A$ tal que $\mathbf{F}f = 0$. Logo, $e(L, A, \mathbf{F}, 0) \geq E_0$. Se $e(L, A, \mathbf{F}, 0) = E_0$ então a função nula será um método de recuperação ótima, ou seja, os dados fornecidos por \mathbf{F} são totalmente ignorados.

Se ocorrer $E_0 = \infty$, teremos também $e(L, A, \mathbf{F}) = \infty$ e assim perdemos a noção de método ótimo. Isso ocorre quando não limitamos apropriadamente o conjunto A . Por exemplo, se A é o conjunto de funções contínuas e $Lf = \int_{-1}^1 f(x)dx$ então qualquer método de aproximação de L que use o valor de f em uma quantidade finita de pontos pré-determinados z_1, \dots, z_n implica $E_0 = \sup\{|\int_{-1}^1 f(x)dx| : f \in A, f(z_k) = 0, k = 1, \dots, n\} = \infty$.

Além de garantir a existência de solução ótima este lema ajuda na caracterização de tais soluções simplificando o problema. Observe que a solução ótima depende do conjunto A e dos dados \mathbf{F} considerados.

Uma questão interessante a ser abordada é saber qual, dentre todas as informações que pudermos considerar dadas por n funcionais lineares, é a que fornece um menor erro

de aproximação em A . Neste caso dizemos que \mathbf{F}^* é informação ótima (de tamanho n) em A para aproximação do funcional L .

Por exemplo, se considerarmos que os possíveis dados são valores da função em n pontos, digamos z_1, \dots, z_n , então nas hipóteses do Lema de Smolyak um método de aproximação ótimo de Lp é da forma $\sum_{k=1}^n a_k f(z_k)$. A informação ótima neste caso é o conjunto de n pontos z_1, \dots, z_n (nós) que realiza o valor mínimo de

$$\inf_{\substack{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R} \\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}}} \sup_{f \in A} \left| L(f) - \sum_{k=1}^n a_k f(z_k) \right|.$$

Observe que, o Lema de Smolyak garante que para cada escolha de nós z_1, \dots, z_n , nas hipóteses do lema, existem a_1, \dots, a_n que atingem

$$\inf_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}} \sup_{f \in A} \left| L(f) - \sum_{k=1}^n a_k f(z_k) \right|.$$

Vários problemas clássicos como interpolação, aproximação uniforme e integração numérica podem ser abordados neste contexto. Dependendo do espaço A e dos dados \mathbf{F} pode-se obter uma solução, isto é, um método de recuperação ótima para o problema.

Um caso onde uma solução ótima é conhecida foi citado anteriormente tal que $X = L^\infty[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| < \infty\}$ e A é o conjunto das α -contrações em $[0, 1]$, isto é, $A = \{f \in L^\infty[0, 1] : |f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|, x, y \in [0, 1]\}$. Note que A é convexo e se $f \in A$ então $-f \in A$.

Exemplo 2.1 (Interpolação). *Considere $0 \leq w \leq 1$ e L o funcional linear que avalia a função neste ponto, $L(f) := f(w)$. Sejam $0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1$, funcionais lineares $F_k(f) := f(x_k) \forall k$ e seja F a aplicação $f \in A \mapsto (L_1 f, \dots, L_n f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.*

Dada uma função $f \in A$ desejamos aproximar o valor $L(f) = f(w)$ usando apenas os dados $\mathbf{F}f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Temos que, com relação às contrações em $L^\infty[0, 1]$, conhecido os valores de uma função nos pontos x_1, \dots, x_n obtemos o menor erro de aproximação do valor da função em w , com relação às contrações de $L^\infty[0, 1]$, tomando o valor no ponto $x_{k^} \in \{x_1, \dots, x_n\}$ mais próximo de w . Provaremos essa afirmação da seguinte forma: seja $k^* \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|x_{k^*} - w| \leq |x_k - w| \forall k$. Considere Φ^* o funcional linear em \mathbb{R}^n definido por $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_{k^*}$, de modo que $\Phi^* \mathbf{F}f = f(x_{k^*})$. Mostraremos Φ^* é um método de recuperação ótima com base em \mathbf{F} na classe A verificando que $E(L, A, F, \Phi^*) = E_0$.*

Considere os pontos $m_0 = 0$, $m_k = (x_k + x_{k+1})/2$ para $k = 1, \dots, n-1$, $m_n = 1$ e seja q a função poligonal em $[0, 1]$ dada por $q(x) = |x - x_k|$ para $x \in I_k = [m_{k-1}, m_k]$, $k = 1, \dots, n$. Note que $w \in I_{k^}$ e portanto $q(w) = |w - x_{k^*}|$.*

Como $q \in A$, $E_0 = \sup\{|f(w)| : f \in A, f(x_k) = 0 \forall k\} \geq |q(w)| = |w - x_{k^*}|$ e $E(L, A, F, \Phi^*) = \sup_{f \in A} |f(w) - f(x_{k^*})| \geq |q(w) - q(x_k)| = |q(w)| = |w - x_{k^*}|$.

Por outro lado, como as funções de A são contrações, $E_0 = \sup\{|f(w)| : f \in A, f(x_k) = 0 \forall k\} \leq |w - x_k|$ para todo k e $E(L, A, F, \Phi^*) = \sup_{f \in A} |f(w) - f(x_{k^*})| \leq |w - x_{k^*}|$.

Concluimos então que $E_0 = |w - x_{k^*}| = E(L, A, F, \Phi^*)$, como queríamos mostrar.

Exemplo 2.2 (Aproximação uniforme). Um problema de aproximação uniforme também pode ser colocado em uma abordagem bastante similar, mas ao invés de um funcional linear consideramos o operador identidade em $L^\infty[0, 1]$ e novamente $L_k(f) := f(x_k)$, $k = 1, \dots, n$. De modo bastante semelhante ao do exemplo anterior pode-se mostrar que dada uma função $f \in L^\infty[0, 1]$ a função escada $s(x) = f(x_k)$ para $x \in I_k$, $s \in L^\infty[0, 1]$ é tal que o método Φ que associa $\mathbf{F}f$ a respectiva função escada $s(x)$ é ótimo.

Exemplo 2.3 (Integração numérica). Agora $L(f) = \int_{[0,1]} f(x)dx$ e os dados são os mesmos dos exemplos anteriores. Neste caso, uma solução ótima é obtida pelo método $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dados por $\int_{[0,1]} s(x)dx = \sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$ onde $s(x)$ é a função escada descrita no exemplo anterior e $B_k = \int_{I_k} dx$.

Soluções semelhantes também podem ser obtidas quando K é um compacto em \mathbb{R}^n e consideramos o conjunto A das contrações no conjunto F de funções limitadas de K a valores reais ou complexos.

Cada solução ótima encontrada depende da informação \mathbf{F} . Assim, para cada informação \mathbf{F} podemos encontrar diferentes valores de $E(L, A, F)$. Uma questão ainda maior é saber qual tipo de informação dentro de um conjunto \mathcal{F} é o melhor tipo de informação que podemos ter. Por exemplo \mathcal{F} pode ser o conjunto formado por todas as n -uplas de valores da função em n pontos, neste caso a questão é saber quais n pontos fornecem informação ótima. No Exemplo 1 é claro que se w for um dos pontos de $\{x_1, \dots, x_n\}$ temos que o erro ótimo é zero, e portanto o menor possível.

Já no Exemplo 2.3 o problema é mais interessante. Neste caso $E_0 = \sup\{|\int_{[0,1]} f(x)dx| : f \in \Omega, f(x_k) = 0 \forall k\}$. Para toda contração f em $[0, 1]$ tal que $f(x_k) = 0 \forall k$ temos que

$$\left| \int_{[0,1]} f(x)dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{I_k} f(x)dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{I_k} |f(x)|dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{I_k} |x - x_k|dx = \int_{[0,1]} q(x)dx.$$

Logo, $E_0 \leq \int_{[0,1]} q(x)dx$. Como $q \in A$, temos que $E_0 = \int_{[0,1]} q(x)dx$. Calculando esta integral obtemos $E_0 = (2x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_{n-1})^2 + 2(1 - x_n)^2/4$.

Desejamos encontrar os valores de $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ que minimizem E_0 . Podemos aplicar um método de minimização e encontrar que $x_k = (2k - 1)/2n$, $k = 1, \dots, n$, são os valores que minimizam essa função.

Assim, para $\mathcal{F} = \{\mathbf{F} = (f(x_1), \dots, f(x_n)) : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$ e sendo $E_0 = (2x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_{n-1})^2 + 2(1 - x_n)^2)/4$, concluímos que

$$E_0 = E\left(f\left(\frac{1}{2n}\right), \dots, f\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right) = \frac{1}{4n}.$$

2.1 Um simples problema de interpolação

Trataremos agora um caso clássico da teoria de recuperação ótima. Podemos definir o funcional de interesse, aquele que almejamos recuperar, como o funcional de integração no intervalo $[a, b]$, o conjunto X o espaço dos polinômios, e o operador F avalia cada polinômio de A em um determinado conjunto de pontos.

Ou seja, dado um polinômio arbitrário $p \in A$, queremos avaliá-lo pelo funcional de integração $L \in X'$, onde X' é o espaço dos funcionais lineares $L : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(p) := \int_a^b p(x) dx$$

tendo como base a informação fornecida por \mathbf{F} .

Para exemplificar consideremos o caso onde A é o espaço dos polinômios algébricos de grau menor ou igual a $n - 1$ e \mathbf{F} a função de interesse em n pontos distintos (x_1, \dots, x_n) , isto é, $\mathbf{F}(p) = (p(x_1), \dots, p(x_n))$.

Precisamos utilizar o polinômio de interpolação de Lagrange, ou seja

$$p(x) = a_1(x)p(x_1) + \dots + a_n(x)p(x_n)$$

sendo a_k da seguinte forma

$$a_k(x) = \prod_{i \neq k, i=1}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

temos assim

$$a_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_k \\ 0 & \text{se } x = x_i, i \neq k. \end{cases}$$

Prosseguindo obtemos

$$\int_a^b p(x) dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i p(x_i) dx = \sum_{i=1}^n p(x_i) \int_a^b a_i(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i p(x_i)$$

considerando

$$A_k = \int_a^b a_k(x) dx$$

Denotaremos nosso método da seguinte forma:

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k p(x_k) := \Phi(F)$$

O método encontrado é, de fato, um método ótimo. Podemos verificar isso ao notar que em cada ponto x_k , $\Phi(F)$ interpola $p(x)$. Considere $R(x) = \Phi(F) - \int_a^b p(x)dx$ um polinômio de grau n , a diferença entre o método aplicado e o funcional de interesse. Temos que R possui, pela definição, n raízes nulas. Pelo teorema fundamental de álgebra concluímos que R é o polinômio identicamente nulo, logo $\Phi(F)$ é um método ótimo.

2.2 Método de Gauss

Na resolução desse caso particular não ficou imposta nenhuma restrição especial aos pontos x_1, \dots, x_n , também conhecido como “nós”, além do fato de serem distintos, entretanto existem cenários onde podemos considerar F um operador bem mais restritivo do que foi mencionado acima, mas perderemos essa flexibilidade na escolha dos nós.

Ao buscar uma solução com um conjunto “menor” de informações, podemos encontrar o resultado denominado “método de Gauss”:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \quad (2.2)$$

para um determinado conjunto a_1, \dots, a_n , e “nós” x_1, \dots, x_n , onde p é um polinômio de grau $2n - 1$.

Apesar de ser um resultado clássico vale a pena fazer um esboço da sua demonstração, visto que utilizaremos a mesma ideia em outro resultado similar.

Defina uma família ortogonal de polinômios que gere o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$, denotaremos essa família por P_0, \dots, P_{2n-1} , e seja $q \in P_n$, temos então, pelo algoritmo de Euclides, que existem r, s sendo ambos polinômios de grau menor ou igual a $n - 1$, tais que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (r(x)q(x) + s(x))dx$$

e pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (r(x)q(x) + s(x))dx = \int_a^b s(x)dx$$

podemos escolher os pontos (x_1, \dots, x_n) as raízes de $q(x)$, temos então $f(x_k) = s(x_k)$, com $k \in \{1, \dots, n\}$, segue a partir desse ponto como na demonstração do resultado anterior.

O resultado do Gauss é também o menor conjunto de pontos, em outras palavras, o melhor operador informação para o problema proposto. Mostraremos esse resultado na seguinte proposição:

Proposição 2.1. *O método descrito em 2.2 é o melhor método possível, nesse contexto.*

Demonstração. De fato, considere que pudéssemos construir uma fórmula igual a 2.2 para polinômios de grau $2n$. Tome então $w(x) = ((x - x_1)^2, \dots, (x - x_n)^2)$, temos que

$$\int_a^b w(x) dx > 0$$

e por outro lado

$$\sum_{k=1}^n a_k w(x_k) = 0$$

um absurdo. ■

2.3 Fórmula de Quadratura de Hermite

Também é interessante pensar numa determinada generalização do operador informação, permitindo que possa considerar pontos repetidos, isto é, dado inteiros não-negativos v_1, \dots, v_n , e pontos x_1, \dots, x_n , tal que p é avaliada v_1 vezes em x_1 , v_2 vezes em x_2 , e assim sucessivamente, ou ainda, $F(p) = (p(x_1), \dots, p^{(v_1-1)}(x_1), \dots, p(x_n), \dots, p^{(v_n-1)}(x_n))$, queremos um resultado semelhante a fórmula de quadratura de Gauss. Em outras palavras, fixado tal operador F , qual o “menor” conjunto A para qual existe um método ótimo?

Existe, de fato, o seguinte resultado, conhecido como fórmula de quadratura de Hermite

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{v_k-1} a_{kj} p^{(j)}(x_k) \quad (2.3)$$

com multiplicidade fixada v_1, \dots, v_n , tomando A como o espaço dos polinômios algébricos de grau menor ou igual a $M(\bar{v}) := n - 1 + v_1 + \dots + v_n$, onde cada v_i é um inteiro positivo ímpar.

Teorema 2.2. *Fixados números naturais ímpares v_1, \dots, v_n , considere A o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $M(\bar{v})$ e o funcional de integração em $[a, b]$, temos então que existe um único método ótimo,*

$$\int_a^b p(t) dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{v_k-1} a_{kj} p^{(j)}(x_k)$$

onde $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. (BOYANOV, 1992)

Precisaremos, todavia, apresentar dois resultados preliminares antes de termos condições para demonstrar o teorema acima.

Definição 2.1. *Seja $p(t)$ um polinômio de grau n . Dizemos que z é um zero simples de $p(t)$ se $(t - z) \mid p(t)$, mas $(t - z)^2 \nmid p(t)$*

Lema 2.2. *Os zeros do polinômio ortogonal são todos simples.*

Demonstração. Fixado $m \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, considere P_1, P_2, \dots, P_m uma sequência de polinômios ortogonais, com relação a função peso $w(x)$, construídos através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1983). Vamos supor que $P_n(x)$ não muda de sinal em $[a, b]$, com $1 \leq n \leq m$. Caso $P_n(x) \geq 0$, temos então

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx > 0$$

mas, pela ortogonalidade de P_n , temos

$$\langle 1, P_n \rangle = \int_a^b 1P_n(x)w(x)dx = 0$$

um absurdo. De forma similar, caso $P_n \leq 0$ teríamos,

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx < 0$$

e então

$$\langle 1, P_n \rangle = \int_a^b 1P_n(x)w(x)dx = 0$$

resultando também em um absurdo, portanto podemos afirmar que P_n muda de sinal em $[a, b]$, isto é, existem x_1, \dots, x_k , raízes de P_n , com multiplicidade ímpar. Suponha que $k < n$. Podemos então escrever $P_n(x) = R(x)Q(x) = (x - x_1)\dots(x - x_k)Q(x)$, sendo R um polinômio de grau k , Q é um polinômio de grau maior ou igual a 1 e todas as raízes de Q tem multiplicidade par em $[a, b]$. Portanto Q não muda de sinal em $[a, b]$. Temos assim, pela relação de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R, P \rangle = \int_a^b R(x)P_n(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b (x - x_1)\dots(x - x_k)P_n(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b (x - x_1)^2 \dots (x - x_k)^2 Q(x)w(x)dx = 0 \end{aligned}$$

um absurdo, já que Q não muda de sinal em $[a, b]$. Podemos concluir então que $k = n$. Portanto P_n tem n raízes com multiplicidade ímpar em $[a, b]$, isto é,

$$P_n(x) = (x - x_1)^{l_1} \dots (x - x_n)^{l_n}$$

com l_1, \dots, l_n índices positivos e ímpares, com $l_1 + \dots + l_n = n$. Daí $l_1 = \dots = l_n = 1$. ■

Lema 2.3. (Teorema do Ponto fixo de Brouwer) Seja $f : D \rightarrow D$ contínua, e D um fechado, convexo e limitado, então existe um ponto c tal que $f(c) = c$. (WRIGHT, 2017)

Demonstração. (Teorema 2.2) Como cada v_k é ímpar, temos que $M(\bar{v}) = n - 1 + v_1 + \dots + v_n$ e o vetor inicial $x := (x_1, \dots, x_n)$. Considere as seguintes definições:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= (t - x_1) \dots (t - x_n) \\ w_k(x, t) &= w(x, t) / (t - x_k) \\ \Pi(x, t) &= (t - x_1)^{v_1-1} \dots (t - x_n)^{v_n-1} \end{aligned}$$

Tome $p(t)$ um polinômio de grau $M(\bar{v})$, podemos dividir $p(t)$ por $\Pi(x, t)w(x, t)$ e, pelo algoritmo de divisão de Euclides, temos que existem $r(t)$ e $q(t)$ polinômios de grau $n - 1$ e $v_1 + \dots + v_n - 1$, respectivamente, tal que $p(t) = q(t)(\Pi(x, t)w(x, t)) + r(t)$.

Observe que $\{w_1(x, t), \dots, w_n(x, t)\}$ forma uma base para os polinômios algébricos de grau $n - 1$ (basta notar que, em cada x_i , $w_j(x, x_i) = 0$ se $j \neq i$ e $w_j(x_i, x_i) = 1$). Gostaríamos que $w(x, t)$ fosse ortogonal, em $[a, b]$, a todo polinômio de grau $n - 1$ com relação a função peso $\Pi(x, t)$.

Caso seja possível construir tais funções teríamos

$$\begin{aligned} \int_a^b p(t) dt &= \int_a^b (\Pi(x, t)w(x, t)q(t) + r(t)) dt = \int_a^b \Pi(x, t)w(x, t)q(t) dt + \int_a^b r(t) dt \\ &= \langle w(x, t), q(t) \rangle + \int_a^b r(t) dt \\ &= \int_a^b r(t) dt \end{aligned}$$

e, como r tem grau $n - 1$, podemos interpolar esse polinômios em $n = v_1 + \dots + v_n$ pontos, portanto existe um único polinômio interpolador tal que

$$\int_a^b r(t) dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{v_k-1} a_{kj} p^{(j)}(x_k)$$

como gostaríamos de demonstrar.

Já que o polinômio $q(t)$ pertence ao espaço dos polinômios de grau $n - 1$, ele é gerado pelos elementos da base $\{w_1(x, t), \dots, w_n(x, t)\}$, assim existem constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tais que $q(t) = \alpha_1 w_1(x, t) + \dots + \alpha_n w_n(x, t)$. Almejamos o seguinte resultado

$$\langle w(y, t), q(t) \rangle = 0$$

com relação a uma determinada função peso $\Pi(y, t)$.

Procuramos, portanto, $y = (x_1, \dots, x_n)$ solução do seguinte sistema

$$\alpha_i \int_a^b \Pi(y, t) w(y, t) w_i(y, t) dt = 0 \quad \text{com } i = 1, \dots, n.$$

considere o caso onde $\alpha_i \neq 0$. Procedemos dividindo ambos os lados por α_i , $1 \leq i \leq n$, e obtemos

$$\int_a^b \Pi(y, t) w(y, t) w_i(y, t) dt = 0 \quad \text{com } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.4)$$

Seja $S := \{(y) = (y_i)_i, a \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq b\}$.

Defina a função contínua $\Phi : S \rightarrow S$, tal que $\Phi(y) = (y_1(y), \dots, y_n(y))$, onde $y_i(y)$ são os zeros do polinômio ortogonal $p(t) = t^n + b(t)$, com $b(t)$ polinômio de grau $n - 1$, com relação a função peso $\Pi(y, t)$. Vamos mostrar que Φ é, de fato, contínua.

Podemos escrever $\Phi = f \circ g$, onde g associa a n -upla $x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow p(t)$, polinômio ortogonal de grau n , com relação a função peso $\Pi(x, t)$, e f associa $p(t) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ raízes de $p(t)$.

Pela fórmula de ortogonalização de Gram-Schmit podemos escrever

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 1 \\ &\vdots \\ p(t) &= p_n(t) = x^n - \langle x_n, p_0 \rangle p_0 - \dots - \langle x_n, p_{n-1} \rangle p_{n-1} \end{aligned}$$

onde $\langle r, s \rangle = \int_a^b \Pi(x, t) r(t) s(t) dt$, que é contínua em relação a x . Logo a função $g : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow p(t)$ é contínua. Falta mostrar a continuidade da função f . Esse resultado foi mostrado por Germán Lozada-Cruz ([LOZADA-CRUZ](#),), resultado que faremos uma pequena adaptação nesse texto.

Considere o seguinte polinômio na variável x , $f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, sendo $y = (a_0, \dots, a_n)$. Suponha que c seja um zero simples do polinômio definido por $f(x, y)$, então $\frac{\partial f(c, y)}{\partial x} \neq 0$ e, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança de c tal que f é bijetiva, e x é uma função contínua de y , isto é $f(x, y) = f(x(y), y)$, numa vizinhança de c . Além disso, como os zeros de f , restrito a g , são os zeros provenientes dos polinômios ortogonais, temos que são todos simples (Lema 2.2), concluímos daí que Φ é contínua.

Escolha $y_0 \in S$. Temos que $\Phi(y_0) = (x_1(y_0), \dots, x_n(y_0)) = y_1$, sendo que $x_i(y_0)$ são os zeros do polinômio $p(t) = t^n + b(t)$, b é um polinômio de grau $n - 1$ e $\langle p, q \rangle = 0 \quad \forall q$ de grau $n - 1$, com relação a função peso $\Pi(y_0, t)$. Isto é,

$$\int_a^b \Pi(y_0, t) p(t) q(t) dt = 0$$

em particular,

$$\int_a^b \Pi(y_0, t) w(y_1, t) w_i(y_1, t) dt = 0 \quad \text{com } i = 0, \dots, n.$$

é quase solução do sistema (2.4), mas os zeros da função peso são diferentes dos zeros do polinômio ortogonal.

Como Φ é contínua e S é fechado, convexo e limitado, temos então, pelo teorema do ponto fixo, que existe um \bar{y} tal que $\Phi(\bar{y}) = \bar{y}$, portanto (2.4) admite solução. ■

2.4 Lema de Smolyak

Um resultado clássico na área de recuperação ótima é o Lema de Smolyak, que nos diz que os funcionais lineares são bons objetos de estudos, já que sempre existirá um método ótimo linear.

Lema 2.4. (*Lema of Smolyak*) Dado um funcional L no espaço de funções X , $A \subset X$, convexo balanceado, $F = (L_1, \dots, L_n)$ funcionais lineares conhecidos para cada f em A , existe um método ótimo linear, isto é, c_1, \dots, c_n tais que

$$E(L, A, F) = \sup\{|L(f) - \sum_{i=1}^n c_i L_i(f)|, f \in A\}$$

Precisamos apresentar um resultado de análise convexa antes.

Proposição 2.3. *Seja D uma região convexa aberta do \mathbb{R}^n e $x \in \partial D$, então existe um plano H , digamos, $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \alpha$, tal que $\forall x \in D$, com $x = (x_1, \dots, x_n)$ temos que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n > \alpha$*

Demonstração. Considere $y_k \rightarrow x$, com $y_k \notin D$. Para cada y_k existe um ponto $x_k \in \partial D$ mais próximo de y_k , pela convexidade de D . Seja n_k o vetor normal unitário definido pelos pontos y_k e x_k , podemos considerar o plano H_k definido por esse vetor normal, passando pelo ponto x_k . Pela definição $x_k \in H_k$. Além disso, pela minimalidade de x_k , temos que qualquer outro ponto de D está acima de H_k (isto é, o produto interno de n_k com o vetor definido pelos pontos y_k e \bar{x} é maior que α). Como n_k são unitários e limitados, eles tem uma subsequência convergente, logo, se $y_k \rightarrow x$, então $n'_k \rightarrow n$, e satisfaz os condições do enunciado. ■

Em algumas situações será interessante ver a proposição 2.3 com a seguinte notação.

Proposição 2.4. *Seja $D \in \mathbb{R}^n$ convexo fechado. Tome $\bar{x} \in \partial D$, temos então que existe um funcional x^* , tal que*

$$\begin{aligned} x^*(x) &\geq x^*(\bar{x}) & \forall x \in D \\ x^*(x) &> x^*(\bar{x}) & \forall x \in \overset{\circ}{D} \end{aligned}$$

Demonstração. (Lema de Smolyak) Defina $A_o = \{x \in A : Fx = 0\}$.

$$\begin{aligned}
e(L, A, F, \Phi) &= \sup\{|L(x) - \Phi(Fx)| : x \in A\} \\
&\geq \sup\{|L(x) - \Phi(Fx)| : x \in A_o\} \\
&= \sup\{\max\{|L(x) - \Phi(0)|, |L(-x) - \Phi(0)|\} : x \in A_o\} \\
&= \sup\{\max\{|L(x) - \Phi(0)|, |L(x) + \Phi(0)|\} : x \in A_o\} \\
&\geq \sup\left\{\frac{|L(x) - \Phi(0)| + |L(x) + \Phi(0)|}{2} : x \in A_o\right\} \\
&\geq \sup\{|L(x)| : x \in A_o\} = M
\end{aligned}$$

já que A_o é balanceado, e a última desigualdade segue pela desigualdade triangular.

Considere $C = \{(L(x), Fx) \in \mathbb{R} \times Y, x \in A\}$. Como C é convexo, e $(M, 0) \in \partial C$, por (2.4) existem $\lambda_0 \in \mathbb{R}, y' \in Y$ tais que

$$\lambda_0 L(x) + y'(Fx) \geq \lambda_0 M \quad \forall (L(x), Fx) \in \bar{C} \quad (2.5)$$

$$\lambda_0 L(x) + y'(Fx) > \lambda_0 M \quad \forall (L(x), Fx) \in \dot{C}. \quad (2.6)$$

Como $(0, 0)$ é um ponto interior de C (de fato, segue pois C é balanceado e não vazio), concluímos, por (2.6), que $\lambda_0 \neq 0$.

Temos também que $(-M, 0) \in \bar{C}$, portanto podemos substituir esse ponto na equação (2.5)

$$\lambda_0(-M) + y'(0) \geq \lambda_0 M$$

isto é, $-\lambda_0 M \geq \lambda_0 M$, logo $\lambda_0 < 0$. Dividindo por λ_0 a equação (2.5) temos

$$L(x) + \frac{y'(Fx)}{\lambda_0} \leq M \quad \forall (L(x), Fx) \in \bar{C}$$

isto é, $e(L, A, F, \frac{y'}{\lambda_0}) = \sup\{x'(x) + \frac{y'(Fx)}{\lambda_0}\} \leq M$ e pela primeira desigualdade provada no início dessa demonstração temos o resultado desejado. Isto é

$$E(L, A, F) = e(L, A, F, \frac{y'}{\lambda_0}) = \sup\{|L(f) - \sum_{i=1}^n c_i L_i(f)|, f \in A\}$$

■

Concluímos também, do resultado acima, que encontrar uma solução para (2.1) é equivalente a encontrar uma solução para o problema

$$\max |x'(x)| \quad s.a. \quad Fx = 0 \quad x \in A \quad (2.7)$$

, como A é balanceado podemos escrever esse problema como

$$\max x'(x) \quad s.a. \quad Fx = 0 \quad x \in A \quad (2.8)$$

Podemos definir a função de Lagrange desse problema da seguinte forma.

$$L(x, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 |x'(x)| + \lambda(Fx)$$

2.5 Recuperação ótima e multiplicadores de Lagrange

Teorema 2.5. *Sejam X, Y espaços lineares reais e L um funcional linear em X , $A \subset X$, balanceado e convexo, e $F : A \rightarrow Y$, uma transformação linear. Então um ponto \bar{x} em (2.8) é solução do problema de recuperação ótima se, e somente se, existe um funcional $\bar{\lambda}$ tal que*

$$\min_{x \in A} L(x, \bar{\lambda}, -1) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}, -1)$$

nesse caso

$$L(x) \approx \bar{\lambda}(Fx)$$

é o método ótimo para o problema (2.1), e

$$E(L, A, F) = |L(\bar{x})|$$

Demonstração. Primeiro iremos assumir que \bar{x} é solução de (2.8). Suponha, que $x^*(\bar{x}) = 0$. Nesse caso, todo ponto admissível x (isto é, $Fx = 0$), satisfaz $x^*(x) = 0$, pois A é um conjunto balanceado. Podemos então definir o seguinte funcional $l(y) = x^*(x)$, tal que $x \in F^{-1}(y)$. Esse funcional está bem definido. De fato, tome x_1, x_2 tal que $Fx_1 = Fx_2$. Como A é convexo, e balanceado, temos que $tx_1 + (1-t)x_2 \in A$. Portanto, $\frac{x_1-x_2}{2} \in A$. Como F é linear, temos que $F(\frac{x_1-x_2}{2}) = 0$, sendo assim, $\frac{x_1-x_2}{2}$ é um ponto admissível. Logo $x^*(\frac{x_1-x_2}{2}) = 0$, ou seja, $x^*(x_1) = x^*(x_2)$, além disso é fácil ver que l é um funcional linear. Denote por $\bar{\lambda}$ a extensão de l em todo espaço Y . Temos então que $x^*(x) = \bar{\lambda}(Fx)$ para todo $x \in A$, é fácil ver que (2.5) vale nesse caso.

Suponha agora que $x^*(\bar{x}) \neq 0$, e considere o seguinte conjunto $C = \{(\alpha, y) \in \mathbb{R} \times Y \mid \alpha = x^*(x), y = Fx, x \in A\}$, temos então que C é convexo e balanceado. Em particular, $(0, 0) \in \overset{\circ}{C}$. Também é fácil ver que $(x^*(\bar{x}), 0) \notin \overset{\circ}{C}$. Então, pela proposição (2.4) existe um par $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times Y'$, não nulo, tal que

$$\lambda_0 \alpha + \lambda(y) \geq \lambda_0 x^*(\bar{x}) \quad \forall (\alpha, y) \in C$$

e

$$\lambda_0 \alpha + \lambda(y) > \lambda_0 x^*(\bar{x}) \quad \forall (\alpha, y) \in \overset{\circ}{C}$$

Como a origem pertence ao interior de C , temos que $\lambda_0 \neq 0$. Além disso, como $(x^*(\bar{x}), 0) \in C$, temos então que $2^{-1}(x^*(\bar{x}), 0) \in C$. Substituindo, temos que $2\lambda_0 \leq \lambda_0$. Portanto $\lambda_0 < 0$. Vamos assumir que $\lambda_0 = -1$.

Tome $x \in A$. Então $(x^*(x), Fx) \in C$, e

$$L(x, \lambda, -1) = -x^*(x) + \lambda(Fx) \geq -x^*(\bar{x}) = -x^*(\bar{x}) + y(F\bar{x}) = L(\bar{x}, \lambda, -1),$$

isto é, \bar{x} é solução de (2.5).

Vamos provar agora que a condição é suficiente. Suponha agora que (2.5) vale para $\bar{x} \in A$ admissível.

$$-x^*(x) = -x^*(x) + \bar{\lambda}(Fx) \geq -x^*(\bar{x}) + \bar{\lambda}(Fx) = -x^*(\bar{x})$$

Precisamos provar ainda a segunda parte do teorema. Como A é balanceado, podemos reescrever da seguinte forma

$$\max_{x \in A} x^*(x) - \bar{\lambda}(Fx) = x^*(\bar{x})$$

Portanto,

$$E(x^*, A, F) \leq x^*(\bar{x})$$

Vamos mostrar que temos na verdade uma igualdade. Assuma que $x \in A$ e $Fx = 0$. Como $-x \in A$, para qualquer método ϕ , temos

$$\begin{aligned} 2x^*(x) &\leq 2|x^*(x)| = |x^*(x) - \phi(0) + \phi(0) + x^*(x)| \leq |x^*(x) - \phi(0)| + |x^*(-x) - \phi(0)| \\ &\leq \sup_{x \in A, Fx=0} |x^*(fx) - \phi(0)| \leq 2 \sup_{x \in A} x^*(x) - \phi(Fx) \end{aligned}$$

Portanto

$$E(x^*, A, F) = x^*(\bar{x})$$

, segue daí que $\bar{\lambda}$ é o método ótimo. ■

3 SISTEMAS DE CHEBYSHEV

3.1 Sistemas de Chebyshev

Os sistemas de Chebyshev são relativamente importantes na área da teoria de aproximação, em particular no estudo das funções *spline* e na teoria de momentos finitos. Um exemplo de um sistema de Chebyshev são os autovalores dos operadores de Sturm-Liouville. Dedicaremos nossos esforços nas próximas páginas em apresentar alguns resultados e exemplos nesse importantíssimo tópico. Durante esse capítulo foi utilizado como base o trabalho de David Barrow (BARROW, 1978) e, de forma complementar, os trabalhos de Richard A Zalik (NOVAES; TORREGROSA, 2017), Almeida (ALMEIDA, 2006) e Osipenko (OSIPENKO; STESSIN, 1992).

Definição 3.1. *Sejam $\{u_i\}_{i=1}^n$ funções em $C^{m-1}[a, b]$. Para quaisquer n pontos distintos $t_i \in [a, b]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ denote*

$$\Lambda(t_1; \dots; t_n) = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_1(t_2) & \dots & u_1(t_n) \\ u_2(t_1) & u_2(t_2) & \dots & u_2(t_n) \\ \vdots & & & \\ u_n(t_1) & u_n(t_2) & \dots & u_n(t_n) \end{bmatrix}$$

e para quaisquer $k \leq n$ pontos distintos $t_i \in [a, b]$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ e $v_1 + \dots + v_k = n$ denote

$$\Lambda(t_1, v_1; \dots; t_k, v_k) = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & \dots & u_1^{(v_1-1)}(t_1) & \dots & u_1(t_k) & \dots & u_1^{(v_k-1)}(t_k) \\ u_2(t_1) & \dots & u_2^{(v_1-1)}(t_1) & \dots & u_2(t_k) & \dots & u_2^{(v_k-1)}(t_k) \\ \vdots & & & & & & \\ u_n(t_1) & \dots & u_n^{(v_1-1)}(t_1) & \dots & u_n(t_k) & \dots & u_n^{(v_k-1)}(t_k) \end{bmatrix}$$

sendo ambas matrizes $n \times n$.

Dizemos que $\{u_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de Chebyshev em $[a, b]$ (ET-system) de ordem n se para quaisquer pontos distintos $t_i \in [a, b]$ tem-se $\det \Lambda(t_1; \dots; t_n) \neq 0$ e, se para quaisquer $v_1 + \dots + v_k = n$ tem-se $\det \Lambda(t_1, v_1; \dots; t_k, v_k) \neq 0$ dizemos que $\{u_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de Chebyshev estendido.

Note que, $\Lambda(t_1; \dots; t_n) = \Lambda(t_1, 1; \dots; t_n, 1)$.

Proposição 3.1. *Seja $U = \text{span}(\{u_i\}_{i=1}^n)$ um ET-system.*

i) *Dado $p \in U$, $p \neq 0$, p tem no máximo $n - 1$ zeros (considerando a multiplicidade).*

ii) *Dados t_1, \dots, t_k em $[a, b]$, $v_1 + \dots + v_k = n$ e n valores $\beta_{1,0}, \dots, \beta_{1,v_1-1}, \dots, \beta_{k,0}, \dots, \beta_{k,v_k-1}$ existe um único $p \in U$ tal que $p^{(j)}(t_i) = \beta_{i,j}$.*

v_1 valores			v_2 valores			v_k valores			
$p(t_1)$	\dots	$p^{(v_1-1)}(t_1)$	$p(t_2)$	\dots	$p^{(v_2-1)}(t_2)$	\dots	$p(t_k)$	\dots	$p^{(v_k-1)}(t_k)$
$\beta_{1,0}$	\dots	β_{1,v_1-1}	$\beta_{2,0}$	\dots	β_{2,v_2-1}	\dots	$\beta_{k,0}$	\dots	β_{k,v_k-1}

Tabela 1 – Valores que definem p em U de dimensão $n = v_1 + \dots + v_k$.

Demonstração. i) Inicialmente vamos provar sem supor multiplicidade. Suponha que p tenha mais zeros do que $n - 1$ zeros. Considere z_1, \dots, z_n n de seus zeros, isto é, $p(z_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Como $p \in U$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tais que $p = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Logo,

$$\begin{bmatrix} u_1(z_1) & u_2(z_1) & \dots & u_n(z_1) \\ u_1(z_2) & u_2(z_2) & \dots & u_n(z_2) \\ \vdots & & & \\ u_1(z_n) & u_2(z_n) & \dots & u_n(z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

isto é,

$$(\Lambda(z_1; \dots; z_n))^t \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz tem determinante diferente de zero então o sistema tem como única solução os valores de α_i iguais a zero. Portanto, p seria a função nula. Como consideremos $p \neq 0$ então não pode haver mais do que n zeros de p .

A prova com multiplicidade segue do item (ii). Suponha o item (ii) válido. Se z_1 é um zero com multiplicidade μ_1 de p isso significa que $p(z_1) = \dots = p^{(\mu_1-1)}(z_1) = 0$ e $p^{(\mu_1)}(z_1) \neq 0$. Se supormos que p tem mais do que $n - 1$ zeros contando multiplicidade então temos $k \leq n$ e $z_1, \dots, z_k \in [a, b]$ distintos que são zeros de p com multiplicidade μ_1, \dots, μ_k respectivamente e tais que $\mu_1 + \dots + \mu_k \geq n$. Tomando $s_1 \leq \mu_1, \dots, s_k \leq \mu_k$ tais que $s_1 + \dots + s_k = n$ então temos por (ii) que existe um único $p \in U$ tal que $p^{(j)}(z_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, s_i - 1$. Neste caso $p = 0$ o que é absurdo.

ii) Seja $p = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, $p \neq 0$. Vejamos que a relação entre os α_i e os $\beta_{i,j}$ é unicamente determinada. Note que, $p^{(j)} = \alpha_1 u_1^{(j)} + \dots + \alpha_n u_n^{(j)}$. Avaliando em t_i concluímos que $\beta_{i,j} = \alpha_1 u_1^{(j)}(t_i) + \dots + \alpha_n u_n^{(j)}(t_i)$. Assim, temos que

$$(\Lambda(t_1, v_1; \dots, t_k, v_k))^t \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,0} \\ \beta_{1,1} \\ \vdots \\ \beta_{k,v_k-1} \end{bmatrix}.$$

Pelo fato do determinante ser diferente de zero então pré-determinados os valores de $\beta_{i,j}$ temos únicos α_i que determinam p . ■

Definição 3.2. Chamamos de base interpolatória de U com relação a $(t_1, v_1; \dots; t_k, v_k)$ com dimensão $v_1 + \dots + v_k = n$ as n funções $\{h_{i,j}\}_{i=1,\dots,k}^{j=0,\dots,v_i-1}$ cada uma delas determinada de acordo com o item (ii) da Proposição 3.1 por

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{(j)}(t_i) &= 1 \quad e \\ h_{i,j}^{(m)}(t_l) &= 0, \quad \text{se } (l, m) \neq (i, j). \end{aligned}$$

Em particular, no caso em que $v_1 = \dots = v_n = 1$ chamamos de base interpolatória com relação a $(t_1; \dots; t_n)$ o conjunto $\{\ell_i\}_{i=1}^n$ tais que $\ell_i(t_i) = 1$ e $\ell_s(t_i) = 0$ se $s \neq i$ e $s, i \in \{1, \dots, n\}$.

Note que, se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as coordenadas de p com relação à u_1, \dots, u_n então $(\Lambda(t_1; \dots, t_n))^t$ é a matriz de mudança de base que produz as coordenadas $p(t_1), \dots, p(t_n)$ na base $\{\ell_s\}_{s=1}^n$ e fixados t_1, \dots, t_k e $v_1 + \dots + v_k = n$ então a matriz $(\Lambda(t_1, v_1; \dots, t_n, v_n))^t$ é a matriz de mudança de base entre as coordenadas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de p com relação à u_1, \dots, u_n e as coordenadas $\beta_{i,j} = p^{(j)}(t_i)$ com relação à base $\{h_{i,j}\}_{i=1,\dots,k}^{j=0,\dots,v_i-1}$.

Definição 3.3. Dado um espaço vetorial de funções U , com imagem nos reais, e um funcional linear $L : U \rightarrow K$, dizemos que L é um funcional linear positivo se, dado $p \in U$, $p \geq 0$, isto é, $p(x) \geq 0$ para cada x no domínio de p , então $L(p) > 0$.

Qualquer funcional linear em um espaço vetorial de dimensão n fica bem determinado sabendo o valor do funcional para os vetores de uma base.

Assim, sejam L um funcional linear em um ET-system $\{u_i\}_{i=1}^n$ e considere um esquema de pontos $(t_1, v_1; \dots; t_k, v_k)$. Se $\{h_{i,j}\}$ é a base interpolatória relativa a $(t_1, v_1; \dots; t_k, v_k)$ então podemos escrever $p = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-1} \beta_{i,j} h_{i,j}$ e, portanto, representar L de modo único por

$$L(p) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-1} \underbrace{L(h_{i,j})}_{a_{i,j}} \beta_{i,j} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-1} a_{i,j} p^{(j)}(t_i). \quad (3.2)$$

Se podemos escolher o esquema $\{t_1, v_1; \dots; t_k, v_k\}$ de pontos no qual serão avaliados os valores da função podemos pensar em uma escolha especial que reduza o número de avaliações. Entre todos os valores $\{p^{(j)}(t_i)\}$ envolvidos, os de menor importância possivelmente sejam os valores das últimas derivadas: $p^{(v_1-1)}(t_1), \dots, p^{(v_k-1)}(t_k)$. O teorema a seguir nos garante que para cada funcional L existe um conjunto de pontos t_1, \dots, t_k para os quais as avaliações de $L(p_{i,v_i-1}^{t_i})$ sejam nulos.

Teorema 3.2. Sejam $U = \{u_i\}_{i=1}^n$ um ET-system em $[a, b]$ e L um funcional linear positivo em U . Sejam v_1, \dots, v_k , inteiros positivos pares com $\sum_{i=1}^k v_i = n$. Então, existem $a < t_1 < \dots < t_k < b$, únicos, tais que $L(p)$ tem uma única representação na forma

$$L(p) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-2} a_{i,j} p^{(j)}(t_i) \quad (3.3)$$

A demonstração deste teorema será obtida pelas proposições que seguem neste capítulo.

O Método de Gauss é o caso particular em que $v_i = 2$, $i \in \{1, \dots, k\}$, no espaço de polinômios com funcional linear sendo a integral. Neste caso, para k informações, existe um conjunto especial de pontos t_1, \dots, t_k e coeficientes a_{i0} para os quais todo elemento pertencente ao espaço de dimensão $n = 2k$ têm sua integral dada por $a_{10}p(t_1) + \dots + a_{k0}p(t_k)$.

A proposição a seguir é equivalente ao teorema anterior.

Proposição 3.3. *Sejam $U = \{u_i\}_{i=1}^n$ um ET-system em $[a, b]$ e L um funcional linear positivo em U . Sejam $t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ distintos, v_1, \dots, v_k inteiros positivos pares com $\sum_{i=1}^k v_i = n$ e $\{h_{ij}\}$ a base interpolatória com relação a $(t_1, v_1; \dots; t_k, v_k)$. Então o vetor $\vec{a} = (a_{ij})$, e t_1, \dots, t_k , satisfazem o Teorema 3.2 se, e somente se,*

$$a_{ij} = L(h_{ij}) \quad (3.4)$$

$$L(h_{i, v_i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.5)$$

Demonstração. É claro que se o Teorema 3.2 vale então a proposição (3.3) vale. Por outro lado, temos que

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-2} a_{ij} (h_{rs})^{(j)}(t_i) = \begin{cases} a_{rs} & \text{se } s < v_r - 1 \\ 0 & \text{se } s = v_r - 1 \end{cases}$$

Por hipótese, $a_{rs} = L(h_{rs})$ e $0 = L(h_{r, v_r-1})$. Logo, a expressão (3.3) vale para todos os elementos da base $\{h_{ij}\}$ e portanto é válida para todo $p \in U$. ■

Para garantir o Teorema 3.2 basta portanto verificar (3.4) e (3.5).

Para ilustrar a validade da expressão (3.3) resolveremos alguns casos triviais.

Exemplo 3.1. *Seja $U = \{1, x\}$ em $[a, b] = [0, 1]$ e $L(p) = \int_0^1 p(x) dx$. Temos $n = 2$ e tomamos $k = 1$ e $v_1 = 2$.*

Inicialmente vamos verificar que U realmente forma um ET-System

$$\Lambda(t_1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix},$$

como $t_1 \neq t_2$, temos que $\{u_1, u_2\}$ forma um sistema de Chebyshev completo em $[0, 1]$.

Em seguida vamos encontrar a base interpolatória de U com relação a $(t_1, 2)$, isto é, $\{h_{10}, h_{11}\}$ satisfazendo $h_{10}(t_1) = 1$, $h'_{10}(t_1) = 0$, $h_{11}(t_1) = 0$, $h'_{11}(t_1) = 1$.

Devido a simplicidade do nosso sistema é fácil verificar que

$$h_{10}(x) = 1$$

$$h_{11}(x) = x - t_1$$

Agora, de acordo com (3.4), temos que encontrar $t_1 \in [0, 1]$ tal que $L(h_{11}) = 0$.

$$L(h_{11}) = \int_0^1 (x - t_1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - xt_1 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - t_1 = 0$$

Portanto $t_1 = \frac{1}{2}$.

Para determinar a constante do método calculamos

$$a_{10} = L(h_{10}) = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Portanto, dado $p \in U$, temos o seguinte método

$$L(p) = \int_0^1 p(x) dx = p\left(\frac{1}{2}\right).$$

Como qualquer $p \in U$ é da forma $p(x) = ax + b$ é fácil verificar que

$$\int_0^1 (at + b) dt = a \frac{t^2}{2} + bt \Big|_0^1 = \frac{a}{2} + b = p\left(\frac{1}{2}\right).$$

Exemplo 3.2. Seja agora $U = \{1, x, x^2, x^3\}$ em $[0, 1]$ e $L(p) = \int_0^1 p(x) dx$. Temos $n = 4$ e tomamos $k = 2$ e $v_1 = v_2 = 2$.

Vamos omitir a demonstração de que este é ET-system.

De acordo com o Teorema 3.2, podemos representar L como

$$L(p) = a_{10}p(t_1) + a_{20}p(t_2),$$

para todo $p \in U$.

Para encontrar os pontos ótimos t_1, t_2 temos duas expressões dados por (3.4) e para encontrar os coeficientes a_{10}, a_{20} as duas condições de (3.5) que a base interpolatória deve satisfazer.

Supondo $h_{10} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$ como ele satisfaz $h_{10}(t_1) = 1, h'_{10}(t_1) = 0, h_{10}(t_2) = 0$ e $h'_{10}(t_2) = 0$ temos

$$\begin{bmatrix} u_1(t_1) & u'_1(t_1) & u_1(t_2) & u'_1(t_2) \\ u_2(t_1) & u'_2(t_1) & u_2(t_2) & u'_2(t_2) \\ u_3(t_1) & u'_3(t_1) & u_3(t_2) & u'_3(t_2) \\ u_4(t_1) & u'_4(t_1) & u_4(t_2) & u'_4(t_2) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & 1 & t_2 & 1 \\ t_1^2 & 2t_1 & t_2^2 & 2t_2 \\ t_1^3 & 3t_1^2 & t_2^3 & 3t_2^2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$h_{10}(x) = \frac{(3t_1^2t_2^2 - 4t_1t_2^3 + t_2^4) + (6t_1t_2^2 - 6t_1^2t_2)x + (3t_1^2 - 3t_2^2)x^2 + (2t_2 - 2t_1)x^3}{t_1^4 - 4t_1^3t_2 + 6t_1^2t_2^2 - 4t_1t_2^3 + t_2^4}$$

De forma análogo procedemos com p_{20} e obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & 1 & t_2 & 1 \\ t_1^2 & 2t_1 & t_2^2 & 2t_2 \\ t_1^3 & 3t_1^2 & t_2^3 & 3t_2^2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$h_{20} = \frac{(t_1^4 - 4t_1^3t_2 + 3t_1^2t_2^2) + (6t_1^2t_2 - 6t_1t_2^2)x + (3t_2^2 - 3t_1^2)x^2 + (2t_1 - 2t_2)x^3}{t_1^4 - 4t_1^3t_2 + 6t_1^2t_2^2 - 4t_1t_2^3 + t_2^4}$$

E assim também obtemos

$$h_{11} = \frac{(-t_1^3t_2^2 + 2t_1^2t_2^3 - t_1t_2^4) + (2t_1^3t_2 - 3t_1^2t_2^2 + t_2^4)x + (-t_1^3 + 3t_1t_2^2 - 2t_2^3)x^2 + (t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2)x^3}{t_1^4 - 4t_1^3t_2 + 6t_1^2t_2^2 - 4t_1t_2^3 + t_2^4}$$

e

$$h_{21} = \frac{(-t_1^4t_2 + 2t_1^3t_2^2 - t_1^2t_2^3) + (t_1^4 - 3t_1^2t_2^2 + 2t_1t_2^3)x + (-2t_1^3 + 3t_1^2t_2 - t_2^3)x^2 + (t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2)x^3}{t_1^4 - 4t_1^3t_2 + 6t_1^2t_2^2 - 4t_1t_2^3 + t_2^4}$$

Considerando (3.5) temos

$$L(h_{11}) = \int_0^1 h_{11}(t)dt = \frac{3 - 8t_2 + 6t_2^2 - 4t_1(1 - 3t_2 + 3t_2^2)}{12(t_1 - t_2)^2} = 0$$

$$L(h_{21}) = \int_0^1 h_{21}(t)dt = \frac{3 + t_1^2(6 - 12t_2) - 4t_2 + 4t_1(-2 + 3t_2)}{12(t_1 - t_2)^2} = 0$$

Obtemos assim a solução do sistema acima nos pontos $t_1 = \frac{(3-\sqrt{3})}{6}$ e $t_2 = \frac{(3+\sqrt{3})}{6}$.

Por fim precisamos calcular as constante a_{10} e a_{20} . Sabemos agora que

$$h_{10}(t) = 9 \left(\frac{1}{18} + \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}t^2 + \frac{2t^3}{\sqrt{3}} \right)$$

$$h_{20}(t) = 9 \left(\frac{1}{18} - \frac{t}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}t^2 - \frac{2t^3}{\sqrt{3}} \right)$$

portanto

$$a_{10} = L(h_{10}) = \int_0^1 9 \left(\frac{1}{18} + \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}t^2 + \frac{2t^3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2}$$

$$a_{20} = L(h_{20}) = \int_0^1 9 \left(\frac{1}{18} - \frac{t}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}t^2 - \frac{2t^3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2}$$

Concluimos que o método de recuperação ótimo é

$$L(p) = \frac{1}{2}p \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) + \frac{1}{2}p \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6} \right)$$

válido para todo todo polinômio p de grau 3.

Exemplo 3.3. Seja $U = \{\text{sen}x, \text{sen}^2x\}$ em $[a, b] = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ e $L(p) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} p(x)dx$. Temos $n = 2$ e tomamos $k = 1$ e $v_1 = 2$.

Repetindo o primeiro exemplo iremos verificar se U realmente forma um ET-System. Temos assim

$$\Lambda(t_1, 2) = \begin{bmatrix} \text{sent}_1 & \text{cost}_1 \\ \text{sen}^2t_1 & 2\text{sent}_1\text{cost}_1 \end{bmatrix} \quad \Lambda(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \text{sent}_1 & \text{sent}_2 \\ \text{sen}^2t_1 & \text{sen}^2t_2 \end{bmatrix},$$

podemos concluir daí que $\{u_i\}$ forma um ET-System.

Procedendo como anteriormente calculamos $h_{11}(t) = \alpha_1 \text{sent} + \alpha_2 \text{sen}^2t$, de forma que

$$\begin{bmatrix} \text{sent}_1 & \text{cost}_1 \\ \text{sen}^2t_1 & 2\text{sent}_1\text{cost}_1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Temos portanto o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 \text{sent}_1 + \alpha_2 \text{sen}^2t_1 &= 0 \\ \alpha_1 \text{cost}_1 + 2\alpha_2 \text{sent}_1\text{cost}_1 &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos a solução

$$\begin{aligned} \alpha_2 \text{sen}^2t_1 &= \frac{\text{sent}_1}{\text{cost}_1} \rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\text{sent}_1\text{cost}_1} \\ &\rightarrow \alpha_1 = \frac{-1}{\text{cost}_1} \end{aligned}$$

Temos assim, $h_{11}(t) = \frac{-\text{sent}}{\text{cost}_1} + \frac{\text{sen}^2t}{\text{sent}_1\text{cost}_1}$. Ao calcular o funcional L em p_{11} podemos obter o nó ótimo t_1 . Isto é,

$$L(p_{11}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{\text{cost}_1} + \frac{\frac{1}{24}(-6 + 3\sqrt{3} - \pi)}{\text{sent}_1\text{cost}_1} = 0$$

Portanto,

$$\text{sent}_1 = \frac{1}{24}(-18 + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \pi)$$

logo, $t_1 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{24}(-18 + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \pi)\right)$. Calculamos agora p_{10} de forma similar e obtemos,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2}{\text{sent}_1} \\ \alpha_2 &= \frac{-1}{\text{sen}^2t_1} \end{aligned}$$

temos assim que $h_{10}(t) = \frac{2}{\text{sent}_1} \text{sent} - \frac{1}{\text{sen}^2t_1} \text{sen}^2t$, como já calculamos t_1 podemos simplificar $h_{10}(t)$. Para obter a constante do método é necessário calcular $L(p_{10})$. Temos assim,

$$\begin{aligned} L(p_{10}) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(24(-18 + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \pi) \text{sent} - 576(-18 + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \pi)^2 \text{sen}^2t \right) dt \\ &= a_{10} \end{aligned}$$

Para qualquer $p \in U$, podemos escrever então

$$L(p) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} p(t) dt = a_{10} p \left(\text{sen}^{-1} \left(\frac{1}{24} (-18 + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \pi) \right) \right)$$

onde $a_{10} \approx -94.4$.

Os resultados a seguir têm por fim a demonstração da Proposição 3.3 e consequentemente do Teorema 3.2.

Definição 3.4. Dado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definimos

$$\Delta_k := \{t = (t_1, \dots, t_k) : a < t_1 < t_2 < \dots < t_k < b\}$$

$$\Delta_{k,\epsilon} := \{t = (t_1, \dots, t_k) : a < t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b; t_{i+1} - t_i < \epsilon, t_1 - a < \epsilon, b - t_k < \epsilon\}$$

Seja L um funcional linear positivo em um ET -system U , com dimensão n par.

Escolha $\epsilon_0 > 0$ e $r \in \Delta_{k,\epsilon_0}$ e defina o funcional linear L_0 por

$$L_0(p) = p(r_1) + \dots + p(r_k).$$

Então, definimos os funcionais L_λ , para cada $\lambda \in [0, 1]$, por

$$L_\lambda = (1 - \lambda)L_0 + \lambda L.$$

Suponha que v_1, \dots, v_k são números pares com $v_1 + \dots + v_k = n$, que são fixados. Para cada $t = (t_1, \dots, t_k)$ considere $\{h_{i,j}\}$ a base interpolatória com relação a $(t_1, v_1; \dots; t_k, v_k)$ e denote, especificamente, h_{i,v_i-1} por h_i^t . Definimos a seguinte função $F : \Delta_{k,\epsilon} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ por

$$F_i(t, \lambda) = -L_\lambda(h_i^t), \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.6)$$

Mostrar a Proposição 3.3 equivale a mostrar que existe uma solução para a equação $F(t, 1) = 0$. A ideia da demonstração consiste em mostrar que existe apenas uma solução para a equação $F(t, 0) = 0$, isto é, existe único $t \in \Delta_{k,\epsilon}$ tal que h_i^t satisfazem $L_0(h_i^t) = 0$ para $i = 1, \dots, k$, que neste caso é $t = r$. Em outras palavras, fixados os v_i 's, para cada $t \in \Delta_{k,\epsilon}$ temos uma representação de L_0 na forma (3.2) e dentre todas apenas com $t = r$ os coeficientes $a_{i,v_i-1} = L_0(h_i^r)$ se anulam para $i = 1, \dots, k$. Então, a partir daí, vamos mostrar que o número de soluções das equações $F(t, \lambda) = 0$ permanece constante para $\lambda \in [0, 1]$. Daí, concluímos que existe apenas uma solução também para $F(t, 1) = 0$.

Proposição 3.4. Se $a < t_1 < \dots < t_k < b$, v_1, \dots, v_k são inteiros positivos pares com $n = \sum_{i=1}^k v_i$ e as constantes $(a_{i,j})$ satisfazem o Teorema 3.2 então $a_{i,v_i-2} > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Demonstração. Considere $U = \text{span}\{u_i\}$, um *ET-System* em $[a, b]$.

Para $i \in \{1, \dots, k\}$, seja $p \in U$, tal que

$$\begin{aligned} p^{(j)}(t_l) &= 0 \quad j = 0, 1, \dots, v_l - 1, \quad l \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\} \\ p^{(j)}(t_i) &= 0 \quad j = 0, 1, \dots, v_i - 3, \quad (\text{caso } v_i \geq 3) \\ p^{(v_i-2)}(t_i) &= 1 \\ p(a) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, p já tem $n - 1$ zeros, contando multiplicidade. Então p não tem outros zeros além desses e todo zero de p que pertence a (a, b) têm multiplicidade par, portanto p não muda de sinal em (a, b) . Logo $L(p) = a_{i, v_i-2} > 0$. ■

Definição 3.5. (*Ponto regular*) Neste trabalho diremos que p é um ponto regular de $f : U \rightarrow V$ se, para cada $x \in U$, tal que $f(x) = p$ temos $\det J_f(x) > 0$

Precisamos mostrar que $p = 0$ é um ponto regular de $F(t, \lambda)$. Vamos considerar primeiro o caso particular $\lambda = 0$.

Proposição 3.5. $p = 0$ é um ponto regular da função $F(t, 0)$, além disso, existe apenas uma única solução t tal que $F(t, 0) = 0$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que existe apenas uma solução para a equação $F(t, 0) = 0$. Pela definição de L_0 temos que $F(r, 0) = 0$. Precisamos mostrar que é a única solução.

Assuma que exista $s \neq r$, tal que $F(s, 0) = 0$. Suponha que $r_1 \neq s_1$. Seja $p \in U$ definido pelos n valores a seguir: $p^{(j)}(s_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, v_1 - 2$ (somando $n - k$ zeros de p até aqui), $p(r_1) = 1$ e, para $i = 2, \dots, k$, $p^{(v_i-1)}(s_i) = 0$ se $r_i = s_i$ ou $p(r_i) = 0$ se $r_i \neq s_i$. Assim, p tem $n - 1$ zeros em $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \cup \{r_2, \dots, r_k\}$ e portanto não tem outros zeros além desses em $[a, b]$. Logo, $p(r_1) \neq 0$.

Escrevendo L_0 na base interpolatória de s temos

$$L_0(p) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-1} a_{ij} p^{(j)}(s_i) = \sum_{i \in \{1, \dots, k\}, r_i \neq s_i} a_{i, v_i-1} p^{(v_i-1)}(s_i).$$

Mas como $F(s, 0) = 0$ então $a_{i, v_i-1} = 0$ e portanto $L_0(p) = 0$. No entanto, pela definição de L_0 temos que $L_0(p) = p(r_1) + \dots + p(r_k) = p(r_1) = 1$, o que nos dá uma contradição.

Basta mostrar agora que $p = 0$ é um ponto regular de F . Temos que

$$F_i(t, 0) = -L_0(h_i(t; \cdot)) = -\sum_{i=1}^k h_i(t; r_i)$$

Expandindo em série de Taylor temos:

$$h_i(r_j) = h_i(t_j) + \frac{h_i^{(1)}(t_j)(r_j - t_j)}{1!} + \dots + \frac{h_i^{(h_j-1)}(t_j)(r_j - t_j)^{v_j-1}}{(v_j - 1)!} + O((r_j - t_j)^{v_j})$$

para cada $j = 1, \dots, k$. Pela definição de h_i , quando $j = i$, temos que $h_i^{(v_i-1)}(t_i) = 1$, e zero caso a derivada de p_i for de grau menor que $v_i - 1$. Portanto,

$$F_i(t, 0) = - \sum_{i=1}^k p_i(t; r_i) = - \frac{(r_i - t_i)^{(v_i-1)}}{(v_i - 1)!} + \sum_{j=1}^k O((r_j - t_j)^{v_j})$$

fazendo a mudança de variável $\bar{t}_i = (r_i - t_i)^{v_i-1}$, que preserva o sinal, temos então que,

$$F_i(t, 0) = - \sum_{i=1}^k p_i(t; r_i) \approx \frac{\bar{t}_i}{(v_i - 1)!}$$

Portanto,

$$\partial \frac{F_i(0, 0)}{d\bar{t}} \approx \frac{1}{(v_i - 1)!}$$

Escolhendo t suficiente próximo de r , temos que $\det J_{F(\cdot, 0)}(t) > 0$, portanto $p = 0$ é um ponto regular de F , quando $\lambda = 0$. ■

Vamos resolver agora o caso genérico para $0 < \lambda \leq 0$.

Lema 3.1. *Se $t = (t_1, \dots, t_k)$, $v_1 + \dots + v_k = n$ e $a = (a_{ij})$ formam uma solução do Teorema 3.2 e $0 < \lambda \leq 1$, então*

$$\det J_{F(\cdot, \lambda)}(t) > 0,$$

isto é, 0 é um ponto regular de $F(\cdot, \lambda)$.

Demonstração. Fixado $\lambda \in (0, 1]$, vamos denotar $F(t, \lambda)$ apenas por $F(t)$. Seja t uma solução da equação $F(t, \lambda) = 0$. Temos então $F_i(t) = 0$ para $i = 1, \dots, k$.

Afim de obter a primeira entrada da matriz jacobiana de F em t , $\partial F_1(t)/\partial t_1$, calculamos inicialmente

$$\begin{aligned} F_1(t + \kappa e_1) - F_1(t) &= -L(h_1^{t+\kappa e_1}) \\ &= - \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-2} a_{ij} (h_1^{t+\kappa e_1})^{(j)}(t_i) \\ &= - \sum_{j=0}^{v_1-2} a_{1j} (h_1^{t+\kappa e_1})^{(j)}(t_1) \\ &= - \sum_{j=0}^{v_1-2} a_{1j} \left(\frac{(-\kappa)^{v_1-j-1}}{(v_1 - j - 1)!} + O(\kappa^{v_1-j}) \right) \end{aligned}$$

sendo a última igualdade decorrente da expansão de Taylor. Portanto,

$$\frac{\partial F_1(t)}{\partial t_1} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{F_1(t + \kappa e_1) - F_1(t)}{\kappa} = a_{1, v_1 - 2}.$$

De modo análogo também concluímos para $i = 2, \dots, n$ que $\frac{\partial F_i(t)}{\partial t_i} = a_{i, v_i - 2}$.

Para $s \neq l$ com $s, l = \{1, \dots, k\}$, temos

$$\begin{aligned} F_s(t + \kappa e_l) - F_s(t) &= -L(h_s^{t + \kappa e_l}) \\ &= -\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i - 2} a_{ij} (h_s^{t + \kappa e_l})^{(j)}(t_i) \\ &= -\sum_{j=0}^{v_i - 2} a_{lj} (h_s^{t + \kappa e_l})^{(j)}(t_i) \\ &= -\sum_{j=0}^{v_i - 2} a_{lj} O(\kappa^{v_i - j - 1}). \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial F_s(t)}{\partial t_l} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{F_s(t + \kappa e_l) - F_s(t)}{\kappa} = 0$$

Assim, a matriz jacobiana de F é uma matriz diagonal e seu determinante é $a_{1, v_1 - 1} \dots a_{k, v_k - 1}$. Segue do Lema 3.4 que este produto é positivo. ■

Desejamos concluir que existe uma solução para $F(t, 1) = 0$, isto é, $L(h_{i, v_i - 1}) = 0$. Para tanto precisamos introduzir mais alguns conceitos e notações.

Definição 3.6. Dado $D \subset \mathbb{R}^k$ convexo, aberto, limitado e $f \in C^N(\overline{D}, \mathbb{R}^k)$, munido com a seguinte norma

$$\|f\|_{C^N} = \max_{0 \leq j \leq N} \sup_{x \in D} \|f^{(j)}(x)\|$$

definimos a função $\xi_f : f(\overline{D}) \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\xi_f(p) = \sum_{x=f^{-1}(p)} \text{sinal}(\det J_f(x))$$

para cada $p \notin f(\partial D) \cup f(S)$, tal que $S := \{x \in D : \det J_f(x) = 0\}$, sendo $J_f(x)$ a matriz Jacobiano de f em x e $\text{sinal}(x)$ a função que associa 1 se $x \geq 0$ e -1 caso contrário.

Exemplo 3.4. Considere a função $f(x) = x^3$, com $D = (-2, 2)$, e $p = 1 \in f(D)$. Desejamos calcular a função ξ no ponto p . Primeiro precisamos verificar se $p \notin f(\partial D) \cup f(S)$, $S = \{x \in D : \det J_f(x) = 0\}$. De fato, $f(\partial D) = f(\{-2, 2\}) = \{-8, 8\}$ e $S = \{x \in D : 3x^2 = 0\} = \{0\}$. Temos assim

$$\xi_f(1) = \text{sinal}(3x_1^2) = 1$$

com $x_1 = 1$, única solução real da equação $f^{-1}(1) = 1$.

O resultado que buscamos seguirá da Proposição 3.5. Para a demonstração desta proposição precisaremos do Teorema da Aplicação Inversa e dos três lemas que seguem.

Definição 3.7. (*Difeomorfismo*) Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ chama-se um difeomorfismo entre U e V quando é uma bijeção diferenciável, cuja inversa também é diferenciável.

Teorema 3.6. (*Teorema da Aplicação Inversa*) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^N , $N \geq 1$, no aberto $U \subset \mathbb{R}^k$. Se $a \in U$ é tal que $J_f(a) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é invertível então existe uma bola aberta $B \subset U$ centrada em a tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo.

Lema 3.2. Dado $D \subset \mathbb{R}^k$ convexo, aberto, limitado, $f \in C^N(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, e $p \notin f(\partial D) \cup f(S)$, tal que $S := \{x \in D : \det J_f(x) = 0\}$, temos que $f^{-1}(p)$ é finito.

Demonstração. Pela continuidade da função f temos que a imagem inversa de um fechado é fechado e, portanto $f^{-1}(p)$ é fechado em \bar{D} . Além disso, $f^{-1}(p) \subset \bar{D}$ é limitado.

Para cada $x \in f^{-1}(p)$, como $\det J_f(x) \neq 0$ então, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe uma vizinhança U_x de x em D tal que f é um difeomorfismo em U_x , em particular, injetiva. Temos, portanto,

$$f^{-1}(p) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(p)} U_x$$

sendo esta uma cobertura por abertos do compacto $f^{-1}(p)$. Portanto, existe uma subcobertura finita tal que

$$f^{-1}(p) \subset \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$$

e, como f é injetiva em U_x então existe apenas uma única solução de $f(x) = p$ em cada U_{x_j} e portanto o conjunto $f^{-1}(p)$ é finito como queríamos mostrar. ■

Lema 3.3. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^k)$, com $J_f(a)$ invertível. Então existe uma vizinhança B de a tal que para $g(x) := J_f(a)^{-1}f(x)$ a função $g - I$ é uma α -contração em B .

Demonstração. Seja $M = \|J_f(a)^{-1}\|$. Como $f \in C^1$ então, as derivadas parciais são contínuas e portanto existe $\delta > 0$, tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|J_f(x) - J_f(a)\| < \frac{\alpha}{M}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\|g' - I\| &= \sup\{\|J_f(a)^{-1}J_f(x)x - x\| : \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{\|J_f(a)^{-1}(J_f(x) - J_f(a))x\| : \|x\| = 1\} \\
&\leq \sup\{\|J_f(a)^{-1}\| \|J_f(x) - J_f(a)\| : \|x\| = 1\} \\
&< M \frac{\alpha}{M} = \alpha
\end{aligned}$$

Sendo $\|g' - I\|$ limitada por α então podemos concluir que a função $g - I$ é uma α -contração. ■

Lema 3.4. (AMBROSETTI; BRÉZIS; CERAMI, 1994) *Seja X um espaço de Banach e $\phi : B_r(0) \subset X \rightarrow X$, dado por $\phi(x) = x + \theta(x)$, onde θ é uma α contração que verifica $\theta(0) = 0$. Então*

$$(i) \ B_{r(1-\alpha)}(0) \subset \phi(B_r(0))$$

(ii) ϕ é injetiva.

Lema 3.5. (ALMEIDA, 2006) *Seja $f \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^k)$, $D \subset \mathbb{R}^k$, e $p \notin f(\partial D) \cup f(S)$, sendo $S = \{x \in D : \det J_f(x) = 0\}$. Então, existe uma vizinhança U , pela topologia de $C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^k)$, tal que qualquer $g \in U$ satisfaz*

$$(i) \ p \notin g(\partial D)$$

$$(ii) \ x \in g^{-1}(p) \rightarrow J_g(x) \neq 0$$

$$(iii) \ \xi_g(p) = \xi_f(p)$$

Demonstração. (i) Como $f(\partial D)$ é fechado e $p \notin f(\partial D)$ então existe $\epsilon_1 = \min\{|p - f(x)| : x \in \partial D\} > 0$. Considere a vizinhança de f formada por g tal que

$$\|g - f\|_{C^1} \leq \frac{\epsilon_1}{2}.$$

Então $p \notin g(\partial D)$. De fato, caso $p \in g(\partial D)$ teríamos que,

$$\|p - f(x_0)\| \leq \frac{\epsilon_1}{2}$$

para algum x_0 , com $g(x_0) = p$, o que contradiz a hipótese inicial sobre ϵ_1 .

(ii) Considere $f^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_\eta\}$, como $J_f(x_i) \neq 0$, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças $B_{r_i}(x_i)$ de x_i e $B_{R_i}(p)$ de p , tais que

$$f_i = f \upharpoonright_{B_{r_i}} : B_{r_i}(x_i) \rightarrow B_{R_i}(p)$$

são difeomorfismos, com $J = \min\{R_1, \dots, R_\eta\}$, além disso, tome J suficientemente pequeno, tal que o Lema (3.4) valha e f seja uma contração e ainda seja β tal que

$$0 < \beta < \|J_f(x)\| \quad \forall x \in B_{r_1}(x_i), \quad i = 1, \dots, \eta.$$

Tome $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Temos então,

$$\text{sinal} J_f(x) = \text{sinal} J_f(x_i), \quad \forall x \in B_r(x_i)$$

Defina $R = \bar{D} \setminus \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$. Note que D é compacto, e além disso $p \notin f(R)$.

Considere $\epsilon_2 = \min|p - f(x)| \quad \forall x \in R$. Então para todo $g \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\|g - f\|_{C^1} \leq \frac{\epsilon_2}{2}$$

teremos que $p \notin g(R)$, ou seja, caso existam, as soluções $g(x) = p$ devem pertencer ao conjunto $\bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$.

A aplicação $f' : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é contínua e com isso, $f'(\bar{D})$ é um compacto em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Por outro lado, a aplicação $\det : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, assim concluímos que a mesma é uniformemente contínua sobre uma vizinhança compacta K de $f'(\bar{D})$. Assim, existe $\epsilon_3 > 0$ tal que $\|X - Y\| < \epsilon_3$ implica que $|\det X - \det Y| < \beta, \forall X, Y \in K$. Se $\|X - Y\| < \epsilon_3$, para algum $X \in f'(\bar{D})$ tem-se que $Y \in K$. Considerando agora a vizinhança de f em C^1 dada por

$$\|g - f\|_{C^1} \leq \frac{\epsilon_3}{2}$$

temos que

$$\forall x \in D, g'(x) \in K \text{ e } |J_f(x) - J_g(x)| < \beta.$$

Considerando

$$U_1 = \{g \in C^1; \|g - f\|_{C^1} \leq \frac{\epsilon_4}{2}\}$$

com $\epsilon_4 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$, obtemos o resultado almejado. Falta agora mostrar que realmente existe $p \in \text{Im}(g)$.

(iii) Para demonstrar que

$$\xi_f(p) = \xi_g(p), \quad \forall g \in U_1$$

devemos mostrar que em cada bola $B_{r_i}(x_i)$ existe um único \bar{x}_i tal que $g(\bar{x}_i) = p$.

Fixe

$$a = 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \{|g'(x_i)^{-1}|\}$$

Podemos então, pelo Lema (3.3) encontrar uma vizinhança $U \subset U_1$, onde

i) $\forall g \in U, |g'(x_i)^{-1}| < a$

ii) $|g'(x_i)^{-1}| |g'(x) - g'(x_i)| < \frac{3}{4}$

Onde $w(x) = g'(x_i)^{-1}g(x)$ e, pelo mesmo argumento do Lema (3.3), temos que $w - I$ é uma $\frac{3}{4}$ -contração. Defina $\phi = w - I$, temos então, $w(x) = x + \phi(x)$ e, pelo Lema (3.4), w é injetiva em $B_r(x_i)$, implicando que g é injetiva.

Defina

$$\theta(x) = w(x + x_i) - w(x_i)$$

temos assim

$$\theta(x) = x + (w(x + x_i) - w(x_i) - x)$$

repetindo o argumento para mostrar que $w - I$ é uma $\frac{3}{4}$ -contração, podemos mostrar que $(w(x + x_i) - w(x_i) - x)$ é uma $\frac{3}{4}$ -contração em $B_r(0)$.

Logo, pelo Lema (3.4), temos que

$$\theta(B_r(0)) \supset B_{\frac{r}{4}}(0) \rightarrow w(B_r(x_i)) - w(x_i) \supset B_{\frac{r}{4}}(0)$$

$$w(B_r(x_i)) \supset B_{\frac{r}{4}}(0) + w(x_i) = B_{\frac{r}{4}}(w(x_i))$$

isto é,

$$g'(x_i)^{-1}g(B_r(x_i)) \supset (B_{\frac{r}{4}}(w(x_i)))$$

$$g(B_r(x_i)) \supset g'(x_i)(B_{\frac{r}{4}}(w(x_i)))$$

Além disso

$$g'(x_i)(B_{\frac{r}{4}}(w(x_i))) \supset B_{\frac{r}{4a}}(g(x_i))$$

pois, para $y \in B_{\frac{r}{4}}(g(x_i))$ temos

$$|g'g(x_i)^{-1}(y) - w(x_i)| = |g'(x_i)^{-1}y - g'(x_i)^{-1}g(x_i)|$$

isto é

$$|g'(x_i)^{-1}(y) - w(x_i)| = |g'(x_i)^{-1}(y - g(x_i))|$$

Portanto

$$|g'(x_i)^{-1}(y) - w(x_i)| < a \frac{r}{4a} = \frac{r}{4}$$

Dessa forma $g'(x_i)^{-1}y \in B_{\frac{r}{4}}(w(x_i))$, ou seja, $y \in g'(x_i)B_{\frac{r}{4}}(w(x_i))$, portanto basta escolher $\frac{r}{4a}$ suficientemente pequeno, para $p \in B_{\frac{r}{4a}}(g(x_i)) \rightarrow p \in g(B_r(x_i))$. ■

Para utilizar o resultado acima para $f = F(\cdot, \lambda)$ e $p = 0$ precisamos que se $F(t, \lambda) = 0$ então $\det J_F(t) \neq 0$ e que a solução t não seja ponto de fronteira. Já mostramos que qualquer solução t é ponto regular da função, ou seja, $\det J_F(t) > 0$. Falta mostrarmos que a solução não pode estar na fronteira. Faremos isto no Lema 3.7. Para tanto precisamos de um resultado intermediário.

Teorema 3.7. (Teorema de Rolle) Dado f , uma função contínua, em um intervalo fechado $[a, b]$, e diferenciável em $[a, b]$, se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Usaremos o Teorema de Rolle na Proposição 3.7 de forma sucessiva, como feito na proposição abaixo.

Lema 3.6. *Seja $f \in C^N[a, b]$, e $a < x < y < b$, tais que x é um zero com multiplicidade $r \geq 2$ de f , e y é um zero com multiplicidade $s \geq 2$. Então existe $\xi_i \in (x, y)$, para $i = 0, \dots, r+s+1$, tal que $f^{(i)}(\xi_i) = 0$.*

Demonstração. Considere que $T(f; j)$ representa o número de zeros que a função $f^{(j)}$ possui, sem contar multiplicidade, em $[x, y]$.

Sabemos que $T(f, 0) = 2$. Suponha que $T(f, i) = n$, temos então que, pelo Teorema de Rolle, esses n zeros irão derivar outros $n - 1$ zeros da derivada de ordem $i + 1$ de f (um zero a cada dois zeros). Além disso, caso $i + 1$ seja menor do que r ou s existe seu respectivo zero x ou y . Isto é

$$T(f, i + 1) = (T(f, i) - 1) + \delta_{[i < r]} + \delta_{[i < s]}$$

onde $\delta_{[i < s]}$ vale 1 caso a condição $i < s$ seja satisfeita ou zero, caso contrário.

Abrindo a forma de recorrência obtemos

$$T(f, i) = T(0) - i + \sum_{n=1}^i \delta_{[n < r]} + \sum_{n=1}^i \delta_{[n < s]}$$

Tomando $i = r + s + 1$, obtemos $T(f, r + s + 1) = 1$. Além disso, para cada $i < r + s + 1$, temos que $T(f, i) > 0$, como queríamos mostrar. ■

Lema 3.7. *Existe $\epsilon > 0$ tal que quaisquer $t \in \Delta_k$ e $a = (a_{ij})$ soluções do Teorema 3.2 de L_λ , $\lambda \in [0, 1]$, tem-se $t \in \Delta_{k, \epsilon}$.*

Demonstração. Suponha que não existe tal ϵ . Então existe uma sequência $\lambda_m \in [0, 1]$, $t_m = (t_{m,1}, \dots, t_{m,k})$, tal que, se $m \rightarrow \infty$, então $t_m \rightarrow t \in \partial\Delta_k$, e $\lambda_m \rightarrow \lambda_0$. Podemos supor que $a < t_1 = t_2 < t_3 \dots < t_k < b$. Os demais casos são tratados de forma similar. Vamos construir uma sequência de funções $p_m \rightarrow p$ e uma sequência $\lambda_m \rightarrow \lambda$, tal que $L_{\lambda_m}(p_m) = 0$, mas $L_\lambda(p) > 0$, uma contradição. Tome $p_m \in U$, de modo que

$$\begin{aligned} p_m^{(j)}(t_{m,i}) &= 0, \quad i = 3, \dots, k, \quad j = 0, \dots, v_i - 1 \\ p_m^{(j)}(t_{m,i}) &= 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, \dots, v_i - 2 \\ p_m(a) &= 0 \quad p'_m(a) > 0 \quad \|p_m\| = 1 \end{aligned}$$

Neste caso temos que $L_{\lambda_m}(p_m) = 0$, para o conjunto ótimo de nós t_m e coeficientes a_m .

Dado que a sequência $\{p_m\}$ é limitada, então existe uma subsequência $\{p_{\bar{m}}\} \rightarrow p \in U$.

Defina $q \in U$, tal que

$$\begin{aligned} q^{(j)}(t_i) &= 0, \quad i = 3, \dots, k. \quad j = 0, \dots, v_i - 1 \\ q^{(j)}(t_1) &= 0, \quad i = 1 \quad j = 0, \dots, v_1 + v_2 - 3 \\ q(a) &= 0 \quad q'(a) > 0 \quad \|q\| = 1 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que p, q tem os mesmos zeros, daí, pela normalização, são iguais. Aplicando o teorema de Rolle sucessivamente, como em 3.6, temos que, existem ξ^m tais que, $\bar{p}_m^{(j)}(\xi_j^m) = 0, j = 0, 1, \dots, v_1 + v_2 - 3$. Daí $q^{(j)}(t_1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{p}_m^{(j)}(\xi_j^m) = 0, j = 0, \dots, v_1 + v_2 - 3$. Logo p e q têm os mesmo zeros, portanto são iguais. Como $p \geq 0$ em $[a, b]$ (pois seus zeros tem multiplicidade par), temos que, se $\lambda \neq 0, L_\lambda(p) > 0$. Se $\lambda = 0$, como $r \notin \partial\Delta_k$, então $t \neq r$, e $L_0(p) > 0$. ■

Podemos agora demonstrar o Teorema 3.2, mostrando que a a condição da Proposição prepPrincipal é satisfeita.

Demonstração. (Teorema 3.2) Precisamos garantir que a condição (3.5) é satisfeita. Isto é, existe um t tal que $F(t, 1) = 0$.

Mostramos que $p = 0$ é um ponto regular de $F(t, \lambda)$, com $0 \leq \lambda \leq 1$, ou seja, o Jacobiano de $F(t, \lambda)$ é positivo quando $F(t, \lambda) = 0$. Daí temos que, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$, $\xi_{F(\cdot, \lambda)}(0)$ é exatamente o número de soluções de $F(t, \lambda) = 0$.

Considerando no Lema 3.5 para cada $\lambda \in [0, 1]$, $f = F(\cdot, \lambda)$, satisfeitas as condições, então o item (iii) garante que ξ é constante em qualquer vizinhança de f . Como ξ toma apenas valores inteiros então ξ é constante quando variamos $\lambda \in [0, 1]$. Os itens (i) e (ii) deste lema nos mostram que as condições deste lema permanecem válidas na vizinhança de cada f .

As condições deste lema para $f = F(\cdot, \lambda)$ são $0 \notin f(\partial D)$, que é garantido pelo Lema 3.7, e $p \notin f(S)$, que é garantido pelo Lema 3.1.

Assim, como $\xi_{F(\cdot, 0)}(0) = 1$, de acordo com a Proposição 3.5, e pelo fato de ξ ser constante quando variamos $\lambda \in [0, 1]$ então concluímos que $\xi_{F(\cdot, 0)}(0) = 1$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Particularmente isto garante que $F(t, 1) = 0$ tem uma única solução. Assim, a condição da Proposição (3.3) é satisfeita e portanto vale o Teorema 3.2. ■

Um resultado interessante que podemos demonstrar é sobre o quão “grande” o espaço pode ser. De fato, o resultado a seguir irá nós dar uma ideia dessa dimensão.

Proposição 3.8. *Seja $\{u_i\}_{i=1}^n$, um ET-system em $(c, d) \supset [a, b]$, e seja L um funcional linear positivo em $U|_{[a, b]}$. Se $c < t_1 < \dots < t_k < d$, e v_1, \dots, v_k , são inteiros positivos satisfazendo*

$$L(u_m) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{v_i-1} a_{ij} u_m^j(t_i) \quad a < t_1 < \dots < t_k < b, \quad (3.7)$$

para $m = 1, \dots, n$. Temos então que $n \leq \bar{n} = \sum_{i=1}^k (v_i + F_i)$, onde F_i é 1 se $t_i \in [a, b]$ e v_i for ímpar, caso contrário $F_i = 0$.

Esse resultado diz que, dado uma certa quantidade de informação, a dimensão do espaço de funções de interesse não pode ser maior que \bar{n} , caso contrário não existe uma representação para o funcional L do tipo (3.7).

Demonstração. Suponha que $n > \bar{n}$. Defina $p \in U$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p^j(t_i) &= 0, \quad j = 0, \dots, v_i \quad t_i \in [a, b] \quad \text{se } v_i \text{ ímpar.} \\ p^j(t_i) &= 0, \quad j = 0, \dots, v_i - 1 \quad t_i \in [a, b] \quad \text{se } v_i \text{ par.} \end{aligned}$$

Observe que p tem pelo menos \bar{n} zeros. Caso $n = \bar{n} + 1$, então p não pode ter mais zeros. Se $n > \bar{n} + 1$, coloque os demais zeros de p fora de $[a, b]$. Logo, os zeros de p que estão em $[a, b]$ tem multiplicidade par, portanto p não muda de sinal em $[a, b]$, ou seja, $p \geq 0$. Portanto $L(p) > 0$ mas, de acordo com a equação (3.7), temos claramente que $L(p) = 0$, uma contradição. ■

4 ESPAÇOS DE HARDY

O espaço de Hardy \mathbb{H}_p é o conjunto de todas as funções analíticas no disco unitário $D := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ satisfazendo a condição

$$\|f\|_{\mathbb{H}_p} := \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

ou

$$\|f\|_{\mathbb{H}_\infty} := \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty$$

Temos, como consequência do Teorema de Cauchy, para $f \in \mathbb{H}_p$ e $z_0 \in D$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_D \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Seja

$$H_p := \{f \in \mathbb{H}_p, \|f\|_{\mathbb{H}_p} \leq 1\}.$$

Considere o problema de recuperar $f \in \mathbb{H}_p$ em um certo ponto $\xi \in D$, dado o operador informação F , que avalia f num determinado conjunto de pontos z_1, \dots, z_n distintos, isto é,

$$Ff := \{f(z_1), \dots, f^{(v_1-1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(v_n-1)}(z_n)\}$$

Estamos interessados em determinar um método que seja ótimo.

De acordo com a notação (2.1), temos que $X = \mathbb{H}_p, Y = C^n, n = v_1 + \dots + v_n, L(f) = f(\xi), A = H_p$. Nesse capítulo usaremos a seguinte notação: Se X é um espaço vetorial normado denotamos por X^* o espaço dos funcionais lineares com domínio em X , do mesmo modo, se $y \in X^*$ poderemos denotar apenas por y^* .

O resultado a seguir é dado no livro de Osypenko ([OSIPENKO, 2000](#))

Teorema 4.1. *Para todo $1 \leq p \leq \infty$, o método*

$$f(\xi) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{v_i-1} a_{ij}(\xi, p) f^{(j)}(x_j)$$

onde

$$a_{ij}(\xi, p) = \frac{W(\xi)(1 - |\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{j!(v_i - j - 1)!} \left(\frac{(1 - \bar{z}_i z)^{v_i}}{w_j(z)(\xi - z)(1 - \bar{\xi} z)^{\frac{p-2}{p}}} \right)^{v_i - j - 1} \Big|_{z=z_i}$$

$$W(z) := \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right)^{v_j}$$

$$w_j(z) := \prod_{s=1, s \neq j}^n \left(\frac{z - z_s}{1 - \bar{z}_s z} \right)^{v_s}$$

é ótimo em H_p .

A demonstração desse resultado segue do Teorema a seguir, cujo caso ainda mais geral está no livro do Osypenko ([OSIPENKO, 2000](#)).

Definição 4.1. Dado $x, y \in H_p$, definimos

$$(x, y)_s = \int_s x(s) \bar{y}(s) dv.$$

e para $a \in \mathbb{C}, 1 \leq p < \infty$

$$a_{(p)} = \begin{cases} a|a|^{p-2}, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$$

Teorema 4.2. Sejam $\psi, g \in X, g \neq 0, Fg = 0, y_0^* \in Y^*$, tais que, para todo $f \in X$, temos

$$(f, \psi)_D - \langle y_0^*, Ff \rangle = \begin{cases} \alpha(f, g_{(p)})_D, & 1 \leq p < \infty \\ (f, \Phi g)_D, & p = \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\alpha > 0, \Phi \in L_1(D), \Phi(z) \geq 0$ em quase todo ponto, e se $p = \infty$, então $|g(z)| = 1$ em quase todo ponto, então y_0^* é um método ótimo.

Demonstração. Seja $1 \leq p < \infty$. Da hipótese e da desigualdade de Holder considerando p' tal que $1/p + 1/p' = 1$ segue que

$$\begin{aligned} \sup_{f \in X} \frac{|(f, \psi)_D - \langle y_0^*, Ff \rangle|}{\|f\|_p} &= \alpha \sup_{f \in X} \frac{|(f, g_{(p)})_D|}{\|f\|_p} \\ &\leq \alpha \sup_{f \in X} \frac{\|f\|_p \|g_{(p)}\|_{p'}}{\|f\|_p} \\ &\leq \alpha \|g_{(p)}\|_{p'} \\ &= \alpha \|g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\sup_{f \in X} \frac{|(f, \psi)_D - \langle y_0^*, Ff \rangle|}{\|f\|_p} \geq \alpha |(g_0, g_{(p)})_D| = \alpha \|g\|_p^{p-1}.$$

Logo o erro do método y_0^* é igual a $\alpha \|g\|_p^{p-1}$. Temos também que

$$E_0 = \sup_{x \in X} |(x, f)_D| \geq |(g_0, f)_D| = \alpha (g_0, g_{(p)})_D + \langle y_0^*, Fg_0 \rangle = \alpha (g_0, g_{(p)})_D = \alpha \|g\|_p^{p-1}.$$

Portanto, como o erro de qualquer método é maior ou igual a E_0 e existe um método que admite erro igual a $\alpha \|g\|_p^{p-1}$ temos que $E_0 = \alpha \|g\|_p^{p-1}$ e y_0^* é um método ótimo.

Para $p = \infty$ a demonstração é similar. ■

Demonstração. (Teorema 4.1) Tome

$$g(z) := \frac{W(z)}{(1 - \bar{\xi}z)^{2/p}}$$

$$\alpha := W(\xi)(1 - |\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}$$

De fato $g \in \mathbb{H}_p$ pois

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathbb{H}_p} &= \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \\ &= \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{W(re^{i\theta})}{(1 - \bar{\xi}re^{i\theta})^{2/p}} \right|^p d\theta \right)^{1/p} \\ &= \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta})|^p \frac{1}{|1 - \bar{\xi}re^{i\theta}|^2} d\theta \right)^{1/p} \end{aligned}$$

e como as funções $|W(z)|$ e $\frac{1}{(1 - \bar{\xi}z)^2}$ tem descontinuidade apenas para $|z| > 1$ então são limitadas para $|z| \leq 1$ e conseqüentemente a expressão acima é limitada.

Note que, $(z - z_j)/(1 - \bar{z}_j z)$ é uma transformação de Möbius que leva 1, -1 e $z_j/|z_j|$ em pontos de norma igual a um e conseqüentemente $|(z - z_j)/(1 - \bar{z}_j z)| = 1$ para $|z| = 1$. Portanto, $|W(z)| = 1$ para $|z| = 1$.

Tome $1 \leq p < \infty$. Queremos agora mostrar que g , e para algum método y^* a igualdade descrita em (4.1) é válida. Então, começando pelo lado direito da igualdade, isto é, $\alpha(x, g_{(p)})_D$, para todo $f \in H_p$

$$\begin{aligned} &\alpha \int_{|z|=1} \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) dv(z) \\ &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \overline{W(z)} \frac{1}{(1 - \bar{\xi}z)^{2/p}} |W(z)|^{p-2} \frac{1}{(1 - \xi z)^{2\left(\frac{p-2}{p}\right)}} |f(z)| dz \\ &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{W(z)} \frac{1}{(1 - \bar{\xi}z)^{2/p}} \left[\left(\frac{1}{|(1 - \bar{\xi}z)|^2} \right)^{1/p} \right]^{p-2} f(z) dz \\ &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} \\ &= f(\xi) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{v_i-1} a_{ij}(\xi, p) f^{(j)}(x_j) \end{aligned}$$

na última igualdade usamos o teorema do resíduo. Basta notar os pontos de indeterminação da função $\frac{f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}}$, que são os pontos ξ e os z_1, \dots, z_n , com multiplicidade v_1, \dots, v_n , respectivamente.

Logo, como essa igualdade é válida para todo ξ , temos que esse é o método ótimo pelo Teorema(4.2).

Para $p = \infty$, tome $\phi := (1 - \bar{\xi}z)^{-2}$, temos

$$\begin{aligned} \alpha \int_{|z|=1} g(\bar{z}) |\phi(z)| f(z) dv(z) &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{W(z)(z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)} \\ &= f(\xi) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{v_i-1} a_{ij}(\xi, \infty) f^{(j)}(x_j). \end{aligned}$$

segue também pelo resultado do teorema (4.2). Segue daí também que o erro cometido pelo método ótimo é igual a

$$E_0 = \frac{|W(\xi)|}{(1 - |\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}.$$

■

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, O. B. *Teoria do Grau e Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — UFCG, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 31.

AMBROSETTI, A.; BRÉZIS, H.; CERAMI, G. Combined effects of concave and convex nonlinear in some elliptic problems. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 122, p. 519–543, 1994. Citado na página 31.

BAKHVALOV, N. S. On the optimality of linear methods of approximation of operators on convex classes of functions. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, v. 4, p. 1014–1018, 1971. Citado na página 2.

BAKHVALOV, N. S. On the optimization of numerical algorithms in *Optimal Recovery*, b. bojanov and h. wozniakowski (eds.). Nova, New York, 1992. Citado na página 2.

BANACH, S. *Theorie des operations lineaires*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1932. Citado na página 3.

BARROW, D. On multiple node gaussian quadrature formulae. *Mathematics of Computation - Math. Comput.*, v. 32, p. 431–431, 04 1978. Citado na página 19.

BOYANOV, B. D. Best methods of interpolation for certain classes of differential functions. *Mat. Zametki*, v. 4, p. 511–524, 1975. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. Best recovery of periodic differentiable functions on the basis of their fourier coefficients. *Serdica*, p. 300–304, 1976. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. Existence of extended monosplines of least deviation. *Serdica*, p. 261–272, 1977. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. On the existence of optimal quadrature formulae for smooth functions. *Calcolo*, p. 61–70, 1979. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. Uniqueness of the monosplines of least deviation. *Numerische Integration*, Birkhäuser-Verlag, Basel, p. 68–97, 1979. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. Uniqueness of the optimal nodes of quadrature formulae. *Math. Comp.*, p. 525–546, 1981. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. Comparison theorems in optimal recovery. *Optimal Algorithms*, Bl. Sendov, p. 15–50, 1986. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. σ -perfect splines and their application to optimal recovery problems. *J. Complexity*, p. 429–450, 1987. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. Optimal recovery of differentiable functions. *Mat. Sbornik*, v. 3, p. 334–353, 1990. Citado na página 2.

BOYANOV, B. D. Optimal recovery of functions and integrals. *First European Congress of Mathematics*, p. 37–390, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 9.

- BOYANOV, B. D.; HUANG, D. Comparison of optimal quadrature formulas. *Numer. Math.*, p. 817–825, 1990. Citado na página 2.
- BOYANOV, B. D.; NIKOLOV, G. Comparison of birkhoff type quadrature formulae. *Math. Comp.*, v. 190, p. 627–648, 1990. Citado na página 2.
- CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 4a. edição. ed. São Paulo: Atual, 1983. Citado na página 10.
- DIMITROV, D. K. et al. Approximate calculation of sums i: Bounds for the zeros of gram polynomials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 4, p. 1867–1886, 2014. Citado na página 1.
- DIMITROV, D. K. et al. Approximate calculation of sums ii: Gaussian type quadrature. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, submetido. 2018. Citado na página 1.
- KORNEICHUK, N. *Splines in approximation theory*. [S.l.]: Nauka, Moscow, 1984. Citado na página 2.
- KORNEICHUK, N.; PAVLOVICH, N. *Exact constants in approximation theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. v. 38. Citado na página 2.
- LOZADA-CRUZ, G. DIVULGACION MATEMÁTICA, A simple application of the implicit function theorem. <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol19/BAMV_XIX-1_p071-076.pdf>. Acessado em 14/02/2017. Citado na página 12.
- MICCHELLI, C. A.; RIVLIN, T. J. A survey of optimal recovery. In: *Optimal estimation in approximation theory*. [S.l.]: Springer, 1977. p. 1–54. Citado na página 2.
- MICCHELLI, C. A.; RIVLIN, T. J.; WINOGRAD, S. The optimal recovery of smooth functions. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 26, n. 2, p. 191–200, 1976. Citado na página 2.
- NOVAES, D. D.; TORREGROSA, J. On extended chebyshev systems with positive accuracy. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 448, n. 1, p. 171–186, 2017. Citado na página 19.
- OSIPENKO, K. Y. *Optimal Recovery of Analytic Functions*. [S.l.]: Nova Science Pub Inc; UK ed. edition, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- OSIPENKO, K. Y.; STESSIN, M. On some problems of optimal recovery of analytic and harmonic functions from inaccurate data. *Journal of approximation theory*, Academic Press, v. 70, n. 2, p. 206–228, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 19.
- SARD, A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 71, n. 1, p. 80–91, 1949. Citado na página 2.
- SCHOENBERG, I. On best approximations of linear operators. In: *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*. [S.l.: s.n.], 1964. v. 67, p. 155–163. Citado na página 2.
- TRAUB, J. F. *A general theory of optimal algorithms*. [S.l.], 1980. Citado na página 2.
- TREFETHEN, L. N. Is gauss quadrature better than clenshaw–curtis? *SIAM review*, SIAM, v. 50, n. 1, p. 67–87, 2008. Citado na página 2.

WEINBERGER, H.; GOLOMB, M. Optimal approximation and error bounds. *On Numerical Approximation*, p. 117–190, 1958. Citado na página 2.

WRIGHT, A. *SPERNER'S LEMMA AND BROUWER'S FIXED POINT THEOREM*. 2017. <<https://web.stanford.edu/~amwright/BFPT.pdf>>. Acessado em 07/09/2017. Citado na página 11.